KVANTETOPOLOGI I EN NØDDESKAL

SØREN FUGLEDE JØRGENSEN

Det følgende er noter fra foredraget "Kvantetopologi i en nøddeskal", Aarhus Universitet, 14. september 2012. Seneste version af noterne kan i skrivende stund findes på http://fuglede.dk/da/maths/notes/other/. Dette er versionen fra 11. november 2014. Kommentarer og rettelser kan sendes til s@fuglede.dk hvor de modtages med kyshånd.

1. Chern-Simons-virkningen

I foredraget her vil jeg diskutere, hvordan man ved at bruge metoder og idéer fra matematisk fysik kan sige noget klogt om 3-dimensional topologi. Helt konkret vil jeg tale om en bestemt invariant af 3-mangfoldigheder, hvordan den opstår som et bestemt fysisk integral, der som udgangspunkt ikke er defineret, hvordan vi kan forstå 3-mangfoldigheder ved brug af dette udefinerede integral, og hvordan vi kan forstå det udefinerede integral ved at forstå 3-mangfoldigheder. Jeg vil forsøge at holde diskussionen på et lavt og overfladisk niveau – på bekostning af præcision og, i mindre grad, korrekthed (så undlad at bruge noterne som andet end noter) – for at danne et overblik over det matematiske felt, der er opstået som et resultat af studiet af invarianten og som undertiden kendes som kvantetopologi, samt de forskellige grene af matematikken, der har haft indflydelse på feltet.

Vi får brug for en smule notation: Lad M være en *n-mangfoldighed*. Det vil sige et topologisk rum (der er Hausdorff og andentælleligt), hvor hvert punkt har en omegn, der er homøomorf med $\mathbb{R}^n$. Er M tilstrækkeligt pænt sat sammen (er M glat), kan vi give mening til differentialformer på M. En k-form på M vil tage k tangentvektorer i et punkt p på M og give et reelt tal på en sådan måde, at tilknytningen afhænger glat af punktet p, er multilineær i hvert punkt, og er alternerende i tangentvektorerne: For en k-form ω og tangentvektorer $X_1, \dots, X_k$ i $p \in M$ gælder

$$\omega_p(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -\omega_p(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k).$$

Ofte betegnes med $\Omega^k(M)$ rummet af k-former på M. På vektorrummene af former har vi følgende operationer, som vi for overblikkets skyld undlader at definere i detaljer:

- Kileprodukt: Hvis ω_1 og ω_2 er en k-form hhv. l-form på M, findes en naturligt defineret $(k+l)$-form $\omega_1 \wedge \omega_2$.
- Ydre differentiation: Hvis ω er en k-form er der et differentiationsbegreb, der giver en $(k+1)$-form $d\omega$.

En af de væsentligste pointer med former er, at de fortæller en, hvordan man skal integrere på en mangfoldighed. Lidt mere præcist kan man integrere en k-form over en delmangfoldighed af M, der har dimension k. (Sammenlign dette med geometrikurset, hvor man ser, hvordan første fundamentalform fortæller os, hvordan man integrerer over en flade men læg mærke til, at første fundamentalform er symmetrisk og ikke antisymmetrisk).

Lad fra nu af $G = \mathrm{SU}(N)$ være Liegruppen af unitære $N \times N$-matricer med determinant 1 og lad $\mathfrak{g} = T_{\mathrm{id}}G$ betegne rummet af skævhermiteske matricer (dvs. $A = -A^H$) med spor 0.

Definition 1. Lad M være en (orienteret) kompakt 3-mangfoldighed. En *konnektion i det trivielle G-bundt over M* er en skævhermitesk matrix A af 1-former med spor 0. Den *klassiske Chern-Simons-virkning* af A er givet ved

$$S(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \in \mathbb{R}.$$

Her er i kileproduktet gemt en matrixmultiplikation, således at begge summander er matricer af 3-former på M, så sporet, der generelt ikke længere vil være 0, giver mening.

Edward Wittens [?] idé var at bruge Chern-Simons-virkningen til at definere en topologisk invariant af 3-mangfoldigheder ved at se på virkningerne af alle mulige konnektioner på 3-mangfoldigheden på én gang. Dem er der ret mange af, så vi starter med at begrænse opmærksomheden ved at bruge en naturlig symmetri (der egentlig kommer af at se på overlejringstransformationer i bundtet $G \times M \to M$): Lad $\mathcal{A}(M)$ være rummet af konnektioner på M og lad os sige at to konnektioner $A, B \in \mathcal{A}(M)$ er ækvivalente, $A \sim B$, hvis der findes en funktion $g : M \to G$ så

$$B = g^{-1}Ag + g^{-1}\,dg.$$

Her er det i notationen gemt, at det giver mening at differentiere afbildninger på G og på en eller anden måde ende med noget, der har værdier i $\mathfrak{g}$. Nu viser det sig, at der for ækvivalente konnektioner A og B gælder, at $S(B)-S(A) \in \mathbb{Z}$, så vi har med andre ord en veldefineret afbildning

$$S : \mathcal{A}(M)/\sim \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Idéen er så nu at betragte det komplekse tal

$$Z_k^{\text{fys}}(M) = \int_{\mathcal{A}(M)/\sim} \exp(2\pi i k S(A))\,\mathcal{D}A. \tag{1}$$

Her er k et naturligt tal, der kaldes *niveauet*. Det første vi bemærker er, at rummet vi integrerer over er uendelig-dimensionalt, så det er som udgangspunkt ikke klart hvad målet $\mathcal{D}A$ betyder. Antagende at alt virker som det bør, har vi dog her konstrueret en topologisk invariant: Integralet afhænger kun af topologien af M, så hvis der for to 3-mangfoldigheder M_1 og M_2 gælder, at $Z_k^{\text{fys}}(M_1) \neq Z_k^{\text{fys}}(M_2)$, kan vi konkludere, at M_1 og M_2 ikke er homøomorfe. Ofte omtales størrelsen $Z_k^{\text{fys}}(M)$ derfor som *niveau k-kvanteinvarianten* af M, og det matematiske felt, der omfatter studiet af kvanteinvarianterne kaldes *kvantetopologi*.

2. Kvantefeltteori generelt

Integralet 1 kom umiddelbart ud af det blå. Lad mig her forklare hvordan det i virkeligheden er en del af et større billede.

Kvantefeltteori kan, kort, siges at være studiet af kvantemekaniske systemer med uendeligt mange frihedsgrader. Det har sine rødder i 1950'erne men er matematisk set endnu ikke specielt velforstået – der er eksempelvis ikke én accepteret matematisk definition på begrebet „kvantefeltteori". Et konkret problem er studiet af kvantemekaniske systemer af N partikler, når N bliver stort, som f.eks. er tilfældet i faststoffysik. Typisk angribes kvantemekaniske systemer gerne med Schrödingerligningen, hvor det for tilstrækkeligt pæne potentialer er muligt at løse de resulterende ligninger, hvis N er i nærheden af 1, men generelt er det umuligt at sige noget analytisk.

En generel (såkaldt Lagrangesk) formulering af kvantefeltteori følger Feynmans formulering af kvantemekanik i termer af sti-integraler. I denne ønsker vi objekter, vi kan kalde „felter" samt et klassisk (modsat kvante) virkningsfunktional S, der til felter knytter reelle tal, og som opfører sig sådan, at "fysiske felter" svarer til stationære punkter $\frac{\delta S}{\delta A} = 0$ (sammenlign med ligningen for geodæter fra geometri). I dette setup er det muligt at uddrage fysisk information fra den såkaldte *partitionsfunktion*

$$\int_{\text{felter } A} \exp(2\pi i S(A)/\hbar)\,\mathcal{D}A,$$

hvor $\hbar$ er Plancks konstant. Integralet kaldes et „sti-integral": At det ikke er en helt tosset idé kan man f.eks. overbevise sig om ved at betragte dobbeltspalteeksperimentet (tegning). Hvis man i dette vil finde sandsynligheden for at observere en partikel et bestemt sted, gør man det typisk ved at betragte partiklerne som bølger og udregne bølgernes amplituder. Feynmans postulat [?] siger i dette tilfælde, at partikler i en vis forstand bevæger sig langs alle stier på én gang: Sandsynligheden for at en partikel bevæger sig langs en sti i en bestemt region af rumtiden er givet ved et komplekst bidrag fra alle stier i den region; stiernes bidrag har samme størrelse, men forskellige faser/komplekse argumenter, der bestemmes af den klassiske virkning. Dette kan umiddelbart virke underligt, men ud fra dette princip er det f.eks. muligt at udlede Schrödingerligningen.

I dette setup er vores integral (1) altså et specialtilfælde, hvor felterne er modelleret ved konnektioner; når det er tilfældet, kalder man ofte teorien en *gaugeteori*. Et andet velkendt eksempel på det samme er Yang-Mills-teori, hvor de underliggende mangfoldigheder nu er 4-dimensionale, og hvor ligningen $\frac{\delta S}{\delta A} = 0$ i specialtilfældet $G = \mathrm{U}(1)$ specialiserer til Maxwells ligninger fra elektromagnetisme.

3. Om stationær fase

Lad os vende tilbage til spørgsmålet om, hvordan vi bør tolke integralet i (1). Den grundlæggende idé er, at de primære bidrag til integralet, når k er stor, kommer fra stationære punkter $\delta S/\delta A = 0$; væk fra disse punkter vil oscillationerne i integranden give bidrag med modsat fase, der går ud med hinanden i integrationen. Mere præcist har vi følgende:

Sætning 2 (Stationær fase-approksimation)**.** *Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være glatte funktioner, så f har endeligt mange ikke-degenererede kritiske punkter, og g har kompakt støtte. Da har vi den asymptotiske opførsel*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikf(x)} g(x)\, dx \sim_{k\to\infty} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} \sum_{x\in\mathrm{Crit}(f)} e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sign}\mathrm{Hess}_x(f)} \frac{e^{ikf(x)} g(x)}{\sqrt{|\det \mathrm{Hess}_x(f)|}}.$$

Det er nu naturligt at antage, at noget tilsvarende gør sig gældende for vores heuristiske sti-integraler; at de væsentligste bidrag til integralerne kommer fra stationære punkter for virkningerne S, og det er her, Chern-Simons-teori udmærker sig: De stationære punkter for Chern-Simons-virkningen er de såkaldte *flade* konnektioner, der opfylder at $dA + A \wedge A = 0$. Tager man ækvivalensklasserne af disse konnektioner under ækvivalensrelationen fra tidligere ender man med en endelig-dimensional kompakt mangfoldighed $\mathcal{M}(M)$, der kaldes *modulirummet af flade konnektioner*, og som (under afbildningen der til en konnektion knytter dens holonomi om en given kurve) kan identificeres med *repræsentationsvarieteten*

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/\text{konjugering}.$$

Ydermere viser det sig, at $S : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ er lokalkonstant og derfor antager endeligt mange værdier $s_1, \ldots, s_n$. I lyset af stationær fase-approksimation ledes man da til formodningen (se [?]), at der findes konstanter $a_j \in \mathbb{C}$, $d_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ for $j = 1, \ldots, n$ så

$$Z_k^{\mathrm{fys}}(M) \sim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k s_j} k^{d_j} a_j + \text{led af lavere orden.} \tag{2}$$

4. Stringent definition af kvanteinvarianten

Det er umiddelbart svært at tjekke en påstand som (2), da kun den ene side er veldefineret. Hvad man i stedet kan håbe på er det følgende: Måske findes en matematisk veldefineret invariant Z_k, der har tilstrækkeligt mange af de samme egenskaber som Z_k^{fys} til at være veldefineret. Er dette tilfældet, vil det da give mening at tjekke (2) for denne nye invariant; holder formodningen vil man med (mere) rette kunne påstå at have givet matematisk mening til Z_k^{fys} og dermed sti-integralet.

Den „egenskab“ ved Z_k^{fys} vi her er på jagt efter er dens opførsel under limning: Hvis vi har givet to mangfoldigheder M_1 og M_2 – der nu tillades at have en flade Σ som rand, $\partial M_1 = \partial M_2 = \Sigma$ – giver det mening at lime mangfoldighederne langs fladen og konstruere en ny mangfoldighed $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$, der nu er uden rand. Witten observerede nu, at $Z_k^{\mathrm{fys}}(M)$ kan bestemmes ud fra $Z_k^{\mathrm{fys}}(M_1)$ og $Z_k^{\mathrm{fys}}(M_2)$. Invarianter med denne opførsel blev da aksiomatiseret til hvad, der i dag kaldes *topologiske kvantefeltteorier* og konkrete eksempler blev først konstrueret af Resjetikhin og Turaev, [?], [?]. Se [?] for en omfattende diskussion.

Lad os diskutere, hvordan deres konstruktion går, når $G = \mathrm{SU}(2)$. Var man til min forrige FFS, vil man vide følgende:

Sætning 3 (Lickorish-Wallace, Kirby, Fenn-Rourke)**.** *Der er en bijektion mellem mængden af lukkede og orienterede 3-mangfoldigheder op til homøomorfi og mængden af båndede links i S^3 op til såkaldte Kirbyflytninger (tegninger). Tilknytningen af 3-mangfoldigheder til links kaldes „kirurgi“.*

Hovedpointen er nu, at der findes knudeinvarianter J_m, $m \in \mathbb{N}$, kaldet de farvede *Jonespolynomier*, der til et link L knytter et Laurentpolynomium $J_{m,L}(q)$, således at gennemsnittet af $J_{1,L}(\exp(2\pi i/k)), \dots, J_{k,L}(\exp(2\pi i/k))$ ikke ændrer sig, hvis man foretager Kirbyflytninger på L. Specielt giver de pr. ovenstående sætning anledning til en invariant af 3-mangfoldigheder: Lad $M = S^3(L)$ være en 3-mangfoldighed, der opstår ved kirurgi på et link L i S^3. Lad da $Z_k(M)$ være dette gennemsnit af de første k farvede Jones-polynomier evalueret i $\exp(2\pi i/k)$ – dette er vores kvanteinvariant.

Jonespolynomierne blev opdaget af Vaughan Jones under hans arbejde med von Neumann-algebraer, der ikke umiddelbart har meget med knudeteori eller Chern-Simons-teori at gøre, og har en naturlig definition i termer af kvantegrupperepræsentationer; det var denne tilgang, Resjetikhin og Turaev gjorde brug af.

Lad mig her til sidst gøre opmærksom på, at man i litteraturen vil se, at definitionen på $Z_k(M)$ normalt ikke går helt så let – for at sikre sig, at Z_k opfører sig under limning, som den bør, skal definitionen ændres med en faktor, der viser sig at være en kompleks enhedsrod. Hvad der viser sig at være endnu værre er, at man er nødt til at udstyre M med en ekstra topologisk struktur, kaldet en „framing“, før det komplekse tal $Z_k(M)$ er veldefineret. Dette antyder, at det ikke er muligt direkte at definere et mål $\mathcal{D}A$ i (1), men at der er andet på spil.

Centre for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Faculty of Science, Aarhus University, DK-8000, Denmark

E-mail address: `fuglede@qgm.au.dk`