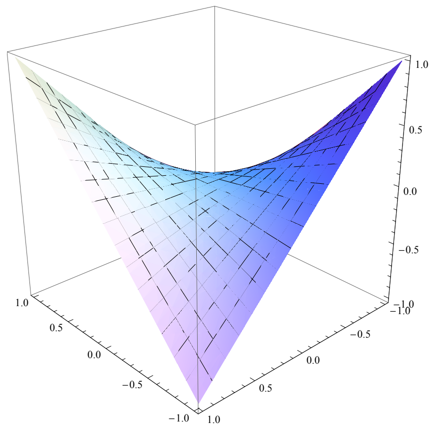
GEOMETRI-TØ, UGE 9

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

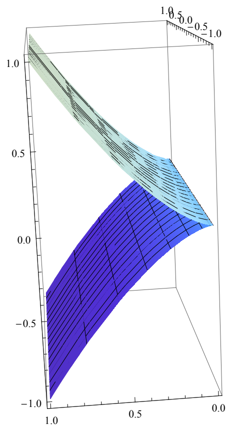
Opvarmningsopgave 1, [P] 4.2.3 (i, ii). Er $\sigma(u,v) = (u, v, uv)$ og $\sigma(u,v) = (u, v^2, v^3)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, regulære fladelapper?

Løsning. Den første er en regulær fladelap: σ er klart glat, det er en homøomorfi på sit billede med invers $\sigma^{-1}(u,v,uv) = (u,v)$, og $\sigma_u = (1,0,v)$ og $\sigma_v = (0,1,u)$ er klart lineært uafhængige.

Den anden er ikke: Her har vi, at $\sigma_u = (1,0,0)$ og $\sigma_v = (0, 2v, 3v^2)$, der ikke er lineært uafhængige for $v = 0$. På Figur 2 nedenfor ses det, hvad der geometrisk går galt.



FIGUR 1. Billedet af $\sigma(u,v) = (u, v, uv)$.



FIGUR 2. Billedet af $\sigma(u,v) = (u, v^2, v^3)$.

∎

Opvarmningsopgave 2, [P] 4.4.1 (i). Find ligningen for tangentplanen af fladelappen $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ i $(1,1,0)$.

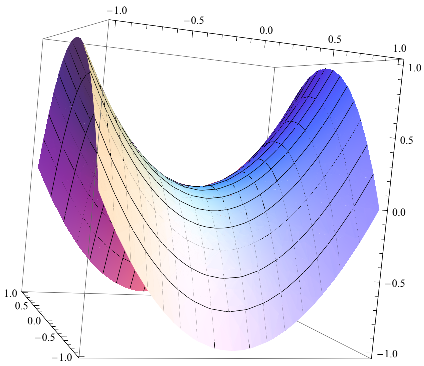
Løsning. Pr. definition er tangentplanen udspændt af σ_u og σ_v. Bemærk først, at $(1,1,0) = \sigma(1,1)$. Vi finder da, at

$$\sigma_u \times \sigma_v = (1,0,2) \times (0,1,-2) = (-2,2,1)$$

er en normal til tangentplanen, der derfor har ligningen

$$0 = \langle (x,y,z), (-2,2,1) \rangle = -2x + 2y + z.$$

■



FIGUR 3. Billedet af $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

Opvarmningsopgave 3. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Ved at betragte som en delmængde af $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, vis at U er en regulær flade.

Bevis. Definer $\sigma : U \to U \subseteq \mathbb{R}^3$ ved $\sigma(u,v) = (u,v,0)$. Det ønskede følger nu af, at σ er en glat homøomorfi og at $\sigma_u = (1,0,0)$ og $\sigma_v = (0,1,0)$ er lineært uafhængige.

□

[P] 4.2.3 (iii). Er $\sigma(u,v) = (u + u^2, v, v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, en regulær fladelap?

Løsning. Nej, for σ er ikke injektiv, da $u \mapsto u + u^2$ ikke er det. ■

Ugeseddelopgave 2. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben og lad $f : U \to \mathbb{R}$ være en glat funktion. Vis at grafen

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$$

er en regulær flade.

Bevis. Definer $\sigma : U \to \Gamma_f$ ved $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$. Vi er færdige, hvis vi kan vise at σ er en glat homøomorfi, og at σ_u og σ_v er lineært uafhængige for alle $(u,v) \in U$.

Det eneste ikketrivielle at tjekke er den sidste betingelse, hvortil vi bemærker, at

$$\sigma_u = (1, 0, f_u), \quad \sigma_v = (0, 1, f_v),$$

der klart er lineært uafhængige. □

[P], 4.1.2. Definer fladelapper $\sigma^x_\pm, \sigma^y_\pm, \sigma^z_\pm : U \to \mathbb{R}^3$ for S^2 ved

$$\begin{aligned} \sigma^x_\pm(u,v) &= (\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), \\ \sigma^y_\pm(u,v) &= (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v), \\ \sigma^z_\pm(u,v) &= (u, v, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}), \end{aligned}$$

hvor $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$. Vis at disse seks fladelapper gør S^2 til en flade.

Bevis. Bemærk først, at der for hver af de seks lapper gælder, at deres billede er åbent i S^2. F.eks. er

$$\sigma_+^x(U) = S^2 \cap \{(x,y,z) \mid x > 0\}.$$

Det er klart, at alle lapperne er homøomorfier, og deres billede dækker S^2: For hvert $(x,y,z) \in S^2$ må gælde, at mindst én af koordinaterne er ikke-nul. Lad os antage, at det er x; da er (x,y,z) i billedet af σ_+^x eller σ_-^x, afhængigt af fortegnet af x. Altså udgør fladelapperne et atlas for S^2. □

[P], 4.2.2. Verificer at de seks lapper fra foregående opgave er regulære. Udregn transitionsafbildningerne mellem dem og verificer, at disse afbildninger er glatte.

Løsning. Det er klart, at afbildningerne er glatte. Vi finder, at

$$(\sigma_\pm^x)_u = (\mp\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1, 0) \quad (\sigma_\pm^x)_v = (\mp\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 0, 1)$$

er lineært uafhængige. Det samme gælder for $\sigma_\pm^y$ og $\sigma_\pm^z$.

Lad os tjekke, at $(\sigma_+^x)^{-1} \circ \sigma_+^y$ er glat. Sæt $\tilde{V} = V = \{(u,v) \in U \mid u > 0\}$. Da er $\sigma_+^y(\tilde{V}) = \sigma_+^x(V)$, og transitionsafbildningen $\Phi = (\sigma_+^x)^{-1} \circ \sigma_+^y : \tilde{V} \to V$ er

$$\Phi(u,v) = (\sigma_+^x)^{-1}(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

er glat. Alle andre transitionsfunktioner kan udregnes på samme måde. ■

[P], 4.4.1 (ii). Find ligningen for tangentplanen for fladelappen $\sigma(r,\theta) = (r\cosh\theta, r\sinh\theta, r^2)$ i $(1,0,1)$.

Løsning. For den anden ser vi, at $(1,0,1) = \sigma(1,0)$. Her er

$$\begin{aligned}\sigma_r \times \sigma_\theta &= (\cosh\theta, \sinh\theta, 2r) \times (r\sinh\theta, r\cosh\theta, 0)|_{(r,\theta)=(1,0)} \\ &= (1,0,2) \times (0,1,0) = (-2,0,1),\end{aligned}$$

og ligningen for planen bliver

$$0 = -2x + z.$$

Det er i øvrigt værd at bemærke, at fladen slet ikke er en flade: Hvis $r = 0$, er $\sigma_\theta = 0$. ■

[P], 5.3.1. Fladen man får ved at rotere kurven $x = \cosh z$ i xz-planen om z-aksen kaldes en katenoide. Beskriv et atlas for denne flade.

Løsning. Definer $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ved $\gamma(u) = (\cosh(u), 0, u)$. Da er katenoiden netop billedet af $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$\sigma(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u),$$

Bemærk dog, at σ ikke kan bruges som parametrisering, da den ikke er injektiv; for alle u, v gælder $\sigma(u,v) = \sigma(u, v+2\pi)$. Vi påstår dog, at $\sigma_1 = \sigma|_{\mathbb{R}\times(0,2\pi)}$ og $\sigma_2 = \sigma|_{\mathbb{R}\times(\pi,3\pi)}$ virker til formålet (se Figur 4). Det er i Eksempel 5.2 givet, at σ_1, σ_2 er regulære fladelapper, og pr. konstruktion vil deres billeder overdække hele fladen. ■

[P], 5.3.3. Lad $\sigma(u,v)$ være den (generaliserede) cylinder fra Eksempel 5.3.1. Vis at kurven $\tilde{\gamma} = \gamma(u) - (\gamma(u)\cdot a)a$ er indeholdt i en plan vinkelret på a, at $\sigma(u,v) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}a$, hvor $\tilde{v} = v + \gamma(u)\cdot a$, og at $\tilde{\sigma}(u,\tilde{v}) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}a$ er en reparametrisering af $\sigma(u,v)$.

Bevis. Da a har længde 1 finder vi, at

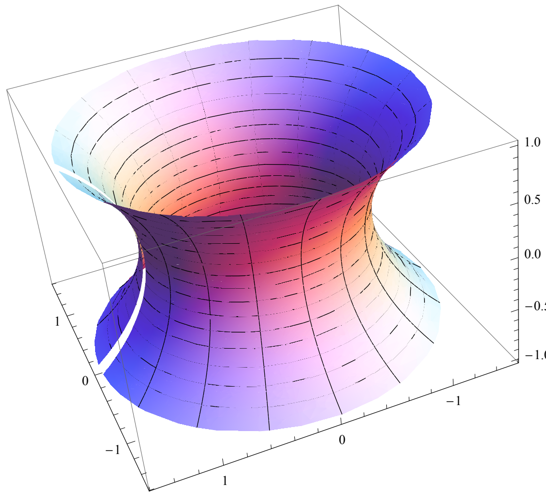
$$\tilde{\gamma}(u)\cdot a = \gamma(u)\cdot a - (\gamma(u)\cdot a)(a\cdot a) = 0,$$

så $\tilde{\gamma}(u)$ er indeholdt i en plan gennem origo, der står vinkelret på a. Husk at $\sigma(u,v) = \gamma(u) + va$. Vi finder, at

$$\tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}a = \gamma(u) - (\gamma(u)\cdot a)a + (v + \gamma(u)\cdot a)a = \gamma(u) + va = \sigma(u,v),$$

som ønsket.

Definer Φ på det passende definitionsområde ved $\Phi(u,v) = (u,\tilde{v})$, så $\sigma = \tilde{\sigma}\circ\Phi$. Vi skal vise, at Φ er glat med glat invers (vi bør egentlig vise, at Φ er en bijektion, men definitionsområderne



FIGUR 4. Billedet af $\sigma(u,v)$ for $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$.

er ikke givet, så det er lidt vanskeligt). At Φ er glat er klart nok, og Φ^{-1}, givet ved $\Phi^{-1}(u,v) = (u, v - \gamma(u) \cdot a)$ er det også. □

Ugeseddelopgave 4. Hvad er det mindste antal lokale parametriseringer, der skal til for at danne et atlas for en cylinder og en sfære?

Løsning. Lad os starte med sfæren. Vi påstår, at det minimale antal er 2. At det kan lade sig gøre med 2 parametriseringer er givet i Eksempel 6.3.5, hvor parametriseringerne er stereografisk projektion (tegning), og lidt mindre eksplicit i Eksempel 4.1.4, hvor der benyttes sfæriske koordinater. At det ikke kan lade sig gøre med én parametrisering følger af, at sfæren da ville være homøomorf med en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$. Sådanne er ikke kompakte, da de kompakte mængder i $\mathbb{R}^2$ er præcis de lukkede og begrænsede (og den eneste ikke-tomme delmængde af $\mathbb{R}^2$, der er både lukket og åben er hele $\mathbb{R}^2$, da $\mathbb{R}^2$ er sammenhængende), men på den anden side er S^2 kompakt, og kompakthed er bevaret under homøomorfi.

For cylinderen $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ er det muligt at bruge blot en enkelt parametrisering. Husk at $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ er en homøomorfi. Med det i mente defineres $\sigma : U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 + v^2 < \pi\} \to C$ ved

$$\sigma(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \tan(u^2 + v^2 - \pi/2)\right).$$

Lad os vise, at σ er en homøomorfi. Injektivitet: Antag at $\sigma(u_1, v_1) = \sigma(u_2, v_2)$. Da tan er injektiv følger det, at $u_1^2 + v_1^2 = u_2^2 + v_2^2$. Ved at sammenligne de første to koordinater får vi da, at $u_1 = u_2$ og $v_1 = v_2$. Surjektivitet: Lad $(x,y,z) \in C$. Vælg $r > 0$, $0 < r^2 < \pi$, så $z = \tan(r^2 - \pi/2)$ og sæt $u = rx$, $v = ry$. Da er $u^2 + v^2 = r^2$, så $(u,v) \in U$, og $\sigma(u,v) = (x,y,z)$. Bemærk endelig, at σ er kontinuert. Den inverse afbildning er beskrevet implicit ovenfor og er ligeledes kontinuert. ■

Bonusspørgsmål: Er cylinderen homøomorf med $\mathbb{R}^2$?