GEOMETRI-TØ, UGE 7

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad $X = \{x, y\}$ være en mængde med to elementer. Betragt familien af delmængder givet ved $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Vi at $\mathcal{T}$ er en topologi på X. Er X med denne topologi Hausdorff? Er X kompakt? Er X sammenhængende? Giv et eksempel på en kompakt men ikke lukket delmængde af X.

Løsning. At $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ er givet. Lad $U_\alpha \in \mathcal{T}$, $\alpha \in A$ være en samling åbne mængder, indekseret ved A. Hvis $U_\alpha = \emptyset$ for alle α, er også foreningen $\emptyset$, som er åben. Hvis $U_\alpha = X$ for et α, er foreningen X, som er åben. Hvis ingen af disse tilfælde gælder, må det være fordi, $U_\alpha = \{x\}$ for et α, og foreningen er $\{x\}$, som er åben. Lad U_i, $i = 1, \dots, n$ være en endelig samling åbne mængder. Hvis et U_i er tomt, er $\bigcap U_i$ også tomt, og dermed åbent. Hvis ingen U_i er tomme, men et U_i er $\{x\}$ er også snittet $\{x\}$, som er åben. Hvis endelig $U_i = X$ for alle i, er $\bigcap U_i = X$, som er åben. Mere generelt viser logikken her, at en voksende følge af åbne mængder $\emptyset \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq X$ altid vil udgøre en topologi.

Vi påstår, at rummet ikke er Hausdorff, da det ikke kan separere punkterne x og y: Den eneste åbne mængde, der indeholder y er X, men denne indeholder også x.

Lad $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ være en vilkårlig samling åbne mængder med $\bigcup U_\alpha = X$. Da findes et $\alpha \in A$, så $y \in U_\alpha$, og som før må gælde $U_\alpha = X$. Specielt kan vi udtynde overdækningen til den endelige overdækning bestående kun af U_α selv. Dermed er X kompakt. Mere generelt er et vilkårligt endeligt topologisk rum kompakt.

Skulle det være tilfældet, at rummet ikke var sammenhængende, skulle der eksistere to disjunkte åbne delmængder, der hverken er tomme eller hele X, og som forener til hele rummet; da der kun er én mængde, der ikke er $\emptyset$ eller X, kan det aldrig lade sig gøre, så rummet er sammenhængende.

Betragt mængden $\{x\}$. Denne mængde er ikke lukket, da $X \setminus \{x\} = \{y\}$ ikke er åben, men $\{x\}$ er kompakt, da den er endelig. Det giver det ønskede eksempel. Dette giver i øvrigt et nyt argument for, at X ikke er Hausdorff, da der for Hausdorffrum gælder, at alle kompakte delmængder er lukkede. ∎

Opvarmningsopgave 2. Lad X, Y være topologiske rum, $y_0 \in Y$ et punkt. Udstyr $X \times \{y_0\} \subseteq X \times Y$ med sportopologien fra produkttopologien og vis, at afbildningen $f : X \to X \times \{y_0\}$ givet ved $f(x) = (x, y_0)$ er en homøomorfi.

Bevis. Det er klart, at f er bijektiv med invers $f^{-1} : X \times \{y_0\} \to X$ givet ved $f^{-1}(x, y_0) = x$. Lad os vise, at f^{-1} hhv. f er kontinuerte. Lad $U \subseteq X$ være en vilkårlig åben mængde. Urbilledet af denne mængde under f^{-1} er billedet under f,

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) = U \times \{y_0\}.$$

Denne mængde er pr. definition åben i sportopologien på $X \times \{y_0\}$, da $U \times Y$ er åben i produkttopologien og

$$U \times \{y_0\} = (U \times Y) \cap (X \times \{y_0\}).$$

Det viser, at f^{-1} er kontinuert. Lad omvendt $V \subseteq X \times \{y_0\}$ være åben i sportopologien fra $X \times Y$. Det vil sige, at der findes en åben mængde $U \subseteq X \times Y$, så $V = U \cap (X \times \{y_0\})$. Pr. definition af produkttopologien ved vi nu, at $U = \bigcup_{\alpha\in A} U_1^\alpha \times U_2^\alpha$ for åbne mængder $U_1^\alpha \subseteq X$, $U_2^\alpha \subseteq Y$. For hvert $(x, y_0) \in V$ findes et α_x, så $(x, y_0) \in U_1^{\alpha_x} \times U_2^{\alpha_x}$, og vi finder, at

$$V = \bigcup_{(x,y_0)\in V} U^{\alpha_x} \times \{y_0\}.$$

Dermed gælder, at

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{(x,y_0)\in V} U_1^{\alpha_x},$$

som er åben i X, da hvert $U_1^{\alpha_x}$ er. Det viser, at f er kontinuert. □

Opvarmningsopgave 3. Antag at $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben delmængde som er sammenhængende i delrumstopologien. Lad $f : U \to \mathbb{R}$ være en differentiabel afbildning. Antag også at differentialet af f opfylder $Df_x = 0$ for alle $x \in U$. Vis at f er konstant i U.

Bevis. Lad $x \in U$ være vilkårlig og vælg $r > 0$ så $N := B(x, r) \subseteq U$. Ifølge Korollar 5.27 er det nok at vise, at $f|_N$ er konstant. Lad $v \in \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig enhedsvektor. Definer $\gamma : (-r, r) \to N$ ved $\gamma(t) = x + tv$ for $|t| < r$. Det er nu nok at vise, at funktionen $g^v : (-r, r) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g^v(t) = f(\gamma(t)) = f(x + tv)$$

er konstant, da et hvilket som helst punkt i N er på formen $x + tv$ for passende enhedsvektor v og $t \in (-r, r)$. Vi finder, at

$$(g^v)'(t) = Dg^v_t = D(f \circ \gamma)_t = Df_{\gamma(t)} \circ D\gamma_t = 0.$$

□

Hvorimens ovenstående bevis intet fejler, var følgende bevis min første indskydelse; det bruger dog et par værktøjer, vi ikke helt har i kassen endnu.

Bevis ved brug af kurvesammenhængenhed. Lad $a, b \in U$ og lad os vise, at $f(a) = f(b)$. Da U er åben og sammenhængende, samt en delmængde af $\mathbb{R}^n$, er den kurvesammenhængende (dette er opgave 5.9.22(a)). Med andre ord findes en kurve $\gamma : [0, 1] \to U$ så $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Vi kan antage, at γ er glat, samt udvide γ til en funktion $\gamma : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \to U$, så γ' giver mening i 0 og 1. Ved at bruge kædereglen på sammensætningen $f \circ \gamma : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, får vi

$$(f \circ \gamma)'(t) = D(f \circ \gamma)_t = Df_{\gamma(t)} \circ D\gamma_t = 0,$$

så $f \circ \gamma$ er konstant. Specielt er

$$f(a) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(b).$$

□

Opvarmningsopgave 4. Vis at et åbent interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ikke er kompakt ved at finde en åben overdækning, som ikke har en endelig deloverdækning.

Bevis. Lad $U_n = (a + \frac{1}{n}, b)$ for $n > n_0$, hvor n_0 er tilstrækkeligt stort til at $U_n \subseteq (a, b)$. Dette er klart en overdækning af (a, b) med åbne mængder. Antag for modstrid at der findes en endelig deloverdækning, $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$, og antag uden tab af generalitet at $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Da er

$$(a, b) = \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j} = U_{i_m} = (a + \tfrac{1}{i_m}, b),$$

hvilket ikke kan passe. □

[S], Opgave 5.9.7. Vis at de åbne kugler $B_d(x, r)$ i et metrisk rum X udgør en basis for $\mathcal{T}_d$.

Bevis. Lad $\mathcal{B}$ være mængden af åbne kugler. Vi skal vise, at $\mathcal{B}$ er en basis, og at topologien induceret af $\mathcal{B}$ er lig $\mathcal{T}_d$.

Bemærk først, at der for ikke-disjunkte $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$ og for hvert x i deres snit findes en åben kugle helt indeholdt i deres snit: Dette følger direkte af, at snittet $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ er åbent.

Vi skal herudover observere, at $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, hvilket følger af, at vi for hvert punkt $x \in X$ kan finde en kugle i $\mathcal{B}$ om x.

Lad os vise, at topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ induceret af $\mathcal{B}$ er lig $\mathcal{T}_d$. Bemærk først, at $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ pr. definition består af alle mulige foreninger af elementer fra $\mathcal{B}$, og da $\mathcal{T}_d$ er lukket under vilkårlig forening, følger det umiddelbart, at $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_d$. Lad omvendt $U \in \mathcal{T}_d$, og lad os vise, at $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. For hvert punkt $x \in U$ vælges $r_x > 0$, så $U_x = B(x, r_x) \subseteq U$. Da er $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, og da ydermere $U_x \in \mathcal{B}$, står her, at $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. $\square$

[S], Opgave 5.9.9. Lad $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ være metriske rum. Definer en metrik på $X_1 \times X_2$ ved

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Vis at $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_d)$ er produkttopologien.

Bevis. Produkttopologien $\mathcal{T}$ er pr. definition topologien på $X_1 \times X_2$ induceret ved basen $\mathcal{B}$ bestående af krydsprodukter af åbne mængder fra X_1 hhv. X_2. Lad $\mathcal{B}_d$ betegne mængden af åbne kugler mht. d, som vi fra foregående opgave ved inducerer topologien $\mathcal{T}_d$. For at vise, at $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, er det som i den foregående opgave nok at vise, at $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{T}$, og at $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Lad $B_d((x_1, x_2), r)$ være et vilkårligt element i $\mathcal{B}_d$. Vi har, at

$$\begin{aligned} B_d((x_1, x_2), r) &= \{(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2 \mid \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) < r\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2 \mid d_1(x_1, y_1) < r \text{ og } d_2(x_2, y_2) < r\} \\ &= B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_2}(x_2, r), \end{aligned}$$

som ligger i $\mathcal{T}$ (faktisk endda i $\mathcal{B}$).

Lad omvendt $U \in \mathcal{B}$. Pr. definition af $\mathcal{B}$ er $U = U_1 \times U_2$ for $U_1 \in \mathcal{T}_{d_1}, U_2 \in \mathcal{T}_{d_2}$. For at vise, at $U \in \mathcal{T}_d$, skal vi vise, at der for et vilkårligt punkt (x_1, x_2) findes et $r > 0$, så kuglen med radius r om (x_1, x_2) er helt indeholdt i U. Lad derfor $(x_1, x_2) \in U$. Da er specielt $x_1 \in U_1$, og da U_1 er åben i X_1, findes et $r_1 > 0$, så $B_{d_1}(x_1, r_1) \subseteq U_1$. Ligeledes findes et $r_2 > 0$ så $B_{d_2}(x_2, r_2) \subseteq U_2$. Sæt nu $r = \min(r_1, r_2)$. Da får vi som ovenfor, at

$$B_d((x_1, x_2), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_2}(x_2, r) \subseteq U_1 \times U_2 = U,$$

som ønsket. $\square$

[S], Opgave 5.9.11. Lad X og Y være topologiske rum, $f : X \to Y$ en afbildning, og antag at $X = X_1 \cup X_2$ for to delmængder X_1, X_2 af X. Antag at X_1 og X_2 er åbne. Vis at f er kontinuert, hvis og kun hvis $f|_{X_1}$ og $f|_{X_2}$ er kontinuerte mht. sportopologierne for X_1 og X_2. Vis at det samme gælder, hvis X_1 og X_2 er lukkede.

Bevis. Lad os først betragte tilfældet, hvor X_1 og X_2 er åbne. Antag, at f er kontinuert og lad os vise, at $f|_{X_1}$ og $f|_{X_2}$ er det. Lad $U \subseteq Y$ være åben. For $i = 1, 2$ er

$$(f|_{X_i})^{-1}(U) = \{x \in X_i \mid f|_{X_i}(x) \in U\} = f^{-1}(U) \cap X_i,$$

og denne mængde er åben i sportopologien på X_i, da $f^{-1}(U)$ er åben i X.

Antag omvendt, at $f|_{X_i}$ begge er kontinuerte og lad igen U være en åben delmængde af Y. Vælg åbne delmængder U_i i X, så

$$(f|_{X_i})^{-1}(U) = U_i \cap X_i.$$

Nu er

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in X \mid f(x) \in U\} = \{x \in X_1 \mid f(x) \in U\} \cup \{x \in X_2 \mid f(x) \in U\} \\ &= (f|_{X_1})^{-1}(U) \cup (f|_{X_2})^{-1}(U) = (U_1 \cap X_1) \cup (U_2 \cap X_2), \end{aligned}$$

som er åben, da X_1 og X_2 var antaget åbne.

Antag nu, at X_1 og X_2 er lukkede. Beviset er præcis det samme som ovenfor, hvor alle forekomster af ordet "åben" erstattes med "lukket". Hertil får vi brug for, at en funktion er kontinuert, hvis og kun hvis urbilleder af lukkede mængder altid er lukkede, samt at en mængde A er lukket i sportopologien på X_i, hvis og kun hvis den kan skrives $A = X_i \cap B$ for en lukket mængde B i X, hvilket er nemt at se. $\square$

[S], Opgave 5.9.15. Vis at de eneste sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ er intervaller.

Bevis. Fra eksempel 5.24 ved vi, at intervaller rent faktisk er sammenhængende. Lad $A \subseteq \mathbb{R}$ være en vilkårlig mængde, der ikke er et interval. Det betyder, at der findes $x, y \in A$, og $z \in \mathbb{R} \setminus A$ med $x < z < y$. Lad $U = A \cap (-\infty, z)$, $V = A \cap (z, \infty)$. Da er U og V åbne i sportopologien på A, $U \cup V = A$ og $U \cap V = \emptyset$, men hverken U eller V er tomme eller hele A, så A er pr. definition ikke sammenhængende. □

[S], Opgave 5.9.19. Vis at produktet $X_1 \times X_2$ af to sammenhængende rum X_1 og X_2 igen er sammenhængende.

Bevis. Lad $y \in X_2$ være vilkårlig og betragt mængderne $C_x = \{x\} \times X_2$, $x \in X_1$, og $D = X_2 \times \{y\}$ i $X_1 \times X_2$. Begge disse mængder er if. Sætning 5.24 (iv) sammenhængende, da de er billeder af de sammenhængende mængder under kontinuerte afbildninger. For hvert $x \in X_1$ er $C_x \cap D \neq \emptyset$, så if. Sætning 5.24 (iii) er $C_x \cup D$ sammenhængende for alle $x \in X_1$. Sammen sætning, brugt på familien $\{A_x = C_x \cup D \mid x \in X_1\}$, giver så, at

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x \in X_1} C_x \cup D$$

er sammenhængende. □

Bevis fra definitionen. Lad U, V være åbne mængder i $X_1 \times X_2$, så $U \cup V = X_1 \times X_2$, og $U \cap V = \emptyset$, og lad os for modstrid antage, at ingen af mængderne er tomme (dette er strengt taget ikke nødvendigt). Pr. definition af topologien på $X_1 \times X_2$ findes familier af åbne mængder U_1^α, V_1^α i X_1 og U_2^α, V_2^α i X_2, så

$$U = \bigcup_\alpha U_1^\alpha \times U_2^\alpha, \quad V = \bigcup_\alpha V_1^\alpha \times V_2^\alpha$$

Der findes enten et $x_2 \in X_2$ samt $x_1, y_1 \in X_1$, så $(x_1, x_2) \in U$, $(y_1, x_2) \in V$, eller også findes et $x_1 \in X_1$ og $x_2, y_2 \in X_2$ så $(x_1, x_2) \in U$ og $(x_1, y_2) \in V$: Antag f.eks. at det første ikke er tilfældet. Det vil sige at der for alle $x_2 \in X_2$ gælder, at (x_1, x_2) er enten i U for alle $x_1 \in X_1$ eller i V for alle $x_1 \in X_1$. Hvis $(x_1, x_2) \in U$ for alle x_1, x_2 står her, at $V = \emptyset$, og så er vi færdige. Hvis ikke findes x_2, y_2, så $(x_1, x_2) \in U$ og $(x_1, y_2) \in V$, hvilket placerer os i det andet af de to tilfælde.

Antag at vi er i det første tilfælde og vælg et $x_2 \in X_2$, der virker til formålet. For alle $x \in X_1$ med $(x, x_2) \in U$ vælger vi nu et α_x, så $(x, x_2) \in U_1^{\alpha_x} \times U_2^{\alpha_x}$. Tilsvarende vælges for alle $x \in X_1$ med $(x, x_2) \in V$ et α_x, så $(x_1, x_2) \in V_1^{\alpha_x} \times V_2^{\alpha_x}$. Således kan vi opskrive $X_1 \times \{x_2\}$ som en forening

$$X_1 \times \{x_2\} = \bigcup_{x \in \mathrm{pr}_1(U \cap (X_1 \times \{x_2\}))} U^{\alpha_x} \times \{x_2\} \cup \bigcup_{x \in \mathrm{pr}_1(V \cap (X_1 \times \{x_2\}))} V^{\alpha_x} \times \{x_2\},$$

eller altså

$$X_1 = \bigcup U^{\alpha_x} \cup \bigcup V^{\alpha_x}.$$

Mængderne $\bigcup U^{\alpha_x}$ og $\bigcup V^{\alpha_x}$ er disjunkte, forener til hele X, er åbne, og pr. valget af x_2 er ingen af de to mængder tomme. Dette er i modstrid med, at X_1 er sammenhængende. □