GEOMETRI-TØ, UGE 6

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være tre gange kontinuert differentierbar. Vis at

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Bevis. Helt generelt gælder for $f \in C^k$, at

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}},$$

hvor $j_l = \sigma(i_l)$ for en permutation $\sigma \in S_k$. I termer af differentialet og den generaliserede udgave af Sætning 4.22, der er nævnt nederst på side s. 40, er

$$D^3 f_{x_0}(e_1, e_1, e_2) = D^3 f_{x_0}(e_2, e_1, e_1).$$

Idéen er, at vi ved at køre den induktive definition har

$$D^3 f_{x_0}(h_1, h_2, h_3) = (D(D(Df)h_1)h_2)_{x_0} h_3,$$

og ved at samle et vilkårligt par af disse D'er til et D^2 og således kan ombytte vilkårlige par h_i, h_{i+1}. At dette giver muligheden for at foretage vilkårlige permutationer af h_i'erne følger af, at simple transpositioner frembringer S_n som gruppe (hvilket dataloger kender som bubble sort). Helt eksplicit gælder i vores opgave, at

$$\begin{aligned} D^3 f_{x_0}(e_1, e_1, e_2) &= (D^2(Df)e_1)_{x_0}(e_1, e_2) = (D^2(Df)e_1)_{x_0}(e_2, e_1) \\ &= D^3 f_{x_0}(e_1, e_2, e_1) = (D(D^2 f)(e_1, e_2))_{x_0}(e_1) = (D(D^2 f)(e_2, e_1))_{x_0}(e_1) \\ &= D^3 f_{x_0}(e_2, e_1, e_1). \end{aligned}$$

□

Opvarmningsopgave 2. Lad $Q : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ være afbildningen $Q(A) = A^2$. Vis at Q er glat.

Bevis. Pr. definition er afbildningen glat, hvis den tilsvarende afbildning $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ er det. Hvis $A_{ij} = a_{ij}$, er indgang (i, j) i A^2 givet ved

$$(A^2)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}.$$

Vi er med andre ord interesserede i afbildningen, der til

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

knytter vektoren $(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ i $\mathbb{R}^{n^2}$, hvor

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj},$$

og vi skal vise, at denne er C^k for alle k. Det er imidlertid klart, at alle de k'te partielle afledede mht. koordinaterne a_{ij} eksisterer og er kontinuerte.

Hvis man vil vise det ud fra definitionen (hvor vi som normen i definitionen på differentiabilitet) bruger operatornormen $\|\cdot\|$, er sagen noget vanskeligere. Lad os om ikke andet vise, at Q er differentiabel med differential $DQ_A(B) = AB+BA$. Ved at bruge submultiplikativitet af operatornormen, får vi

$$\begin{aligned}\lim_{A\to A_0} \frac{\|A^2 - A_0^2 - dQ_{A_0}(A-A_0)\|}{\|A-A_0\|} &= \lim_{A\to A_0} \frac{\|A^2 - A_0^2 - A_0(A-A_0) - (A-A_0)A_0\|}{\|A-A_0\|} \\ &= \lim_{A\to A_0} \frac{\|A^2 - A_0^2 - A_0A + A_0^2 - AA_0 + A_0^2\|}{\|A-A_0\|} \\ &= \lim_{A\to A_0} \frac{\|(A-A_0)^2\|}{\|A-A_0\|} \leq \lim_{A\to A_0} \frac{\|A-A_0\|^2}{\|A-A_0\|} \\ &= \lim_{A\to A_0} \|A-A_0\| = 0,\end{aligned}$$

hvilket viser, at Q er differentiabel, og at DQ_A er differentialet af Q. Tilsvarende kan man finde, at $D^2Q_A(B_1,B_2) = B_1B_2 + B_2B_1$, og at

$$D^kQ_A(B_1,\dots,B_k) = 0$$

for $k > 2$ og alle $A, B_1, \dots, B_k \in M_n(\mathbb{R})$. □

Opvarmningsopgave 3. Antag at (X, d) er et metrisk rum. Lad $\mathcal{T}$ være familien af åbne mængder i X givet ved metrikken. Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi.

Bevis. At $\emptyset$ er åben er den tomme betingelse. At X er åben er oplagt, da der for alle $x \in X$ gælder, at $B(x,r) \subseteq X$, uanset hvad $r > 0$ er. At systemet af åbne mængder er lukket under endeligt snit og vilkårlig forening blev vist for to uger siden. □

Opvarmningsopgave 4. Lad $X = \{0,1\}$ være det metriske rum med to punkter $0,1$, der har afstand $d(0,1) = 1$. For hvilke reelle tal $r > 0$, gælder der, at den lukkede kugle $\overline{B}(0,r)$ er afslutningen af den åbne kugle $B(0,r)$.

Løsning. Husk at $\overline{B}(0,r) = \{x \in X \mid d(0,x) \leq r\}$, og at afslutningen af $B(0,r)$ er den mindste lukkede mængde, der indeholder $B(0,r)$. Bemærk, at alle delmængder af X er lukkede, så i dette tilfælde er der ingen forskel på en mængde og dens afslutning. Det følger, at

$$\overline{B}(0,r) = \begin{cases} \{0\}, & r < 1, \\ \{0,1\}, & r \geq 1, \end{cases}$$

$$\overline{B(0,r)} = B(0,r) = \begin{cases} \{0\}, & r \leq 1, \\ \{0,1\}, & r > 1. \end{cases}$$

Den lukkede kugle er altså afslutningen af den åbne kugle, hvis og kun hvis $r \neq 1$. ■

Til næste opgave får vi brug for følgende resultat.

Sætning 1 (Middelværdisætningen på $\mathbb{R}$)**.** *Lad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuert, så $f|_{(a,b)}$ er differentiabel. Da findes et $c \in (a,b)$, så*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis. Beviset kan ses som et resultat af integralmiddelværdisætningen, Sætning 3.24 i Beltoft-Thomsen, brugt på funktionen f', hvis man yderligere antager, at denne er kontinuert (dvs. at f er C^1). Her er et kort bevis, taget fra Ebbe Thue Poulsens *Funktioner af en og flere variable*, der ikke gør brug af integrationsteori:

Lad $l(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ være den lineære (affine) funktion, så $l(a) = f(a)$, $l(b) = f(b)$. Denne har konstant hældning

$$l'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lad $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ være givet ved $h(x) = f(x) - l(x)$. Da er h differentiabel, og $h(a) = h(b) = 0$. Det betyder, at der findes et $c \in (a,b)$, så $h'(c) = 0$, og vi har så, at

$$f'(c) = h'(c) + l'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Opgave 1. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og lad $f : I \to \mathbb{R}^n$ være C^1. Definer $g : I \times I \to \mathbb{R}^n$ ved

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y, \\ f'(x), & x = y. \end{cases}$$

Vis at g er kontinuert, og at g er kontinuert differentiabel i $I \times I \setminus \{(x,x) \mid x \in I\}$. Vis ydermere, at hvis f er to gange differentiabel i et punkt $x_0 \in I$, da er g differentiabel i (x_0, x_0).

Bevis for (a). Vi starter med at vise kontinuitet af hver koordinat g_i, $1 \leq i \leq n$. Lad $(x_0, y_0) \in I \times I$. Hvis $x_0 \neq y_0$, findes en lille omegn omkring (x_0, y_0), hvorpå

$$g_i(x,y) = \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y},$$

og kontinuitet følger af kontinuiteten af f_i. Antag derfor at $y_0 = x_0$, og lad os vise, at f_i er kontinuert i (x_0, x_0). Lad $\varepsilon > 0$ være givet, og vælg $\delta > 0$, så $|f_i'(x) - f_i'(y)| < \varepsilon$ for $|x - y| < \delta$. Lad nu $(x,y) \in B((x_0,x_0), \frac{\delta}{\sqrt{2}})$ og antag, at $x \geq y$. Hvis $x = y$ har vi $|x - x_0| < \delta$ og

$$|g_i(x,y) - g_i(x_0,x_0)| = |f_i'(x) - f_i'(x_0)| < \varepsilon.$$

For $x \neq y$, kan vi ifølge Sætning 1 ovenfor vælge et $c \in (y,x)$ så $f_i'(c) = g_i(x,y)$. Som ovenfor er $|c - x_0| < \delta$, så

$$|g_i(x,y) - g_i(x_0,x_0)| = |f_i'(c) - f_i'(x_0)| < \varepsilon,$$

hvilket viser kontinuitet. □

Bevis. Lad os give et nyt bevis for kontinuitet, der er lettere at generalisere. At g er kontinuert differentiabel væk fra diagonalen i $I \times I$ følger af differentiabilitetssætningen, da vi ser, at de partielle afledede

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{f'(x)}{x-y} + \frac{f(x)}{(x-y)^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{f'(y)}{x-y} - \frac{f(y)}{(x-y)^2}$$

er kontinuerte. Specielt er g også kontinuert væk fra diagonalen. Lad os nu se, hvorfor g er kontinuert på diagonalen.

Definer $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ ved

$$\psi(x) = f(x) - x f'(x_0)$$

med henblik på at beskæftige os med den afledede af ψ, som her blot er

$$\psi'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Lad $\varepsilon > 0$ og $x_0 \in I$. Da f er C^1, er f' kontinuert, så der findes $\delta > 0$, så

$$\|J\psi_z\| = \|\psi'(z)\| = \|f'(z) - f'(x_0)\| < \varepsilon$$

for alle $z \in B(x_0, \delta)$. Lad $(x,y) \in B((x_0,x_0),\delta)$. Da er specielt $[x,y] \subseteq B(x_0,\delta)$. Hvis $x = y$, er nu

$$\|g(x,y) - g(x_0,x_0)\| = \|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon.$$

Hvis $x \neq y$ følger af middelværdisætningen (fra noterne), at

$$\|f(x) - f(y) - (x-y)f'(x_0)\| = \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq |x - y| \sup_{z \in [x,y]} \|J\psi_z\| \leq |x - y|\varepsilon,$$

og ved division med $|x-y|$ får vi

$$\|g(x,y)-g(x_0,x_0)\| = \left\| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x_0) \right\| \leq \varepsilon$$

som ønsket.

Antag nu, at f er to gange differentiabel i x_0. Vi påstår nu, at differentialet af g i x_0 er den lineære afbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, givet i standardbasen ved matricen

$$Jg_{x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Specielt skal i så fald gælde, at

$$Jg_{x_0}((x,y)-(x_0,x_0)) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x+y-2x_0).$$

For at vise, at g er gange differentiabel i x_0, følger vi vinket på ugeseddelen og betragter $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ givet ved

$$\varphi(x) = f(x) - xf'(x_0) - \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0).$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet, og vælg δ, så der gælder

$$\sqrt{2}\frac{\|J\varphi_z\|}{|z-x_0|} = \sqrt{2}\frac{\|f'(z)-f'(x_0)-(z-x_0)f''(x_0)\|}{|z-x_0|} < \varepsilon$$

for $z \in B(x_0,\delta)$. Dette er muligt, da f' er differentiabel i x_0.

Lad $(x,y) \in B((x_0,x_0),\delta)$ med $(x,y) \neq (x_0,x_0)$. Hvis $x = y$ har vi nu

$$\frac{\|g(x,y)-g(x_0,x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x+y-2x_0)\|}{\|(x,y)-(x_0,x_0)\|} = \frac{\|f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)\|}{\sqrt{2}|x-x_0|} < \varepsilon.$$

For $x \neq y$ får vi som ovenfor, at

$$\begin{aligned}
\varphi(x)-\varphi(y) &= f(x)-f(y)-f'(x_0)(x-y)-\tfrac{1}{2}f''(x_0)((x-x_0)^2-(y-y_0)^2) \\
&= g(x,y)(x-y)-f'(x_0)(x-y)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x^2-y^2-2x_0(x-y)) \\
&= g(x,y)(x-y)-f'(x_0)(x-y)-\tfrac{1}{2}f''(x_0)(x+y-2x_0)(x-y).
\end{aligned}$$

Bemærk nu, at der for alle z mellem x og y gælder, at

$$|z-x_0| \leq |x-x_0|+|y-x_0| = \|(x,y)-(x_0,x_0)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x,y)-(x_0,x_0)\|.$$

Alt i alt får vi altså ved at bruge middelværdisætningen på φ, at

$$\begin{aligned}
\frac{\|g(x,y)-g(x_0,x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x+y-2x_0)\|}{\|(x,y)-(x_0,x_0)\|} &= \frac{1}{\|(x,y)-(x_0,x_0)\|}\frac{\|\varphi(x)-\varphi(y)\|}{|x-y|} \\
&\leq \sup_{z\in[x,y]} \frac{\|J\varphi_z\|}{\|(x,y)-(x_0,x_0)\|} \\
&\leq \sqrt{2} \sup_{z\in[x,y]} \frac{\|J\varphi_z\|}{|z-z_0|} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vi konkluderer, at g er differentiabel i x_0 med differential givet i (1). □

Opgave 2. Lad $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ være mængden af rationelle tal. Beregn randen $\partial\mathbb{Q}$.

Løsning. Pr. definition er $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int}(\mathbb{Q})$, hvor $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. Husk desuden, at et punkt $x \in A$ kaldes indre, hvis der findes en åben omegn $U \subseteq A$ om x.

Specielt finder vi her, at $\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ (da en hvilken som helst kugle om et irrationalt tal indeholder rationale tal), at $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ (da en hvilken som helst kugle om de rationale tal indeholder irrationale tal), at $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, og dermed at $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. ■

[S], Opgave 5.9.3. En afbildning mellem to topologiske rum, $f : X \to Y$, kaldes kontinuert i $x \in X$, såfremt $f^{-1}(V)$ er en omegn af x for enhver omegn V af $f(x)$. Vis at dette stemmer overens med begrebet for metriske rum.

Vis ydermere, at f er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert i alle punkter $x \in X$.

Bevis. Antag først, at f er kontinuert i x i den topologiske forstand og lad $\varepsilon > 0$. Pr. antagelse er $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ en omegn af x, så der findes et $\delta > 0$, så $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Her står med andre ord, at hvis der om et $y \in X$ gælder, at $d(x, y) < \delta$, så er $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, så $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Antag nu omvendt, at f er kontinuert i forstanden fra metriske rum og lad V være en omegn af $f(x)$. Det vil sige, at der findes et $\varepsilon > 0$, så $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Pr. antagelse findes da et $\delta > 0$, så $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$, men her står, at $f^{-1}(V)$ er en omegn af x.

Antag nu, at $f : X \to Y$ er en kontinuert funktion, lad $x \in X$, og lad V være en omegn af $f(x)$. Da findes en åben mængde U med $f(x) \in U \subseteq V$, og vi har, at $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$. Da f er kontinuert, er $f^{-1}(U)$ er åben, og det følger, at $f^{-1}(V)$ er en omegn af x.

Antag nu omvendt, at f er kontinuert i alle punkter $x \in X$, og lad V være en åben mængde i Y. Hvis $f^{-1}(V)$ er tom, er den åben, og vi er færdige. Hvis ikke, vælges for alle punkter $x \in f^{-1}(V)$ en åben mængde U_x, så $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Dette er muligt, da der for sådanne x gælder, at V er en åben omegn af $f(x)$, så $f^{-1}(V)$ er en omegn af x. Det følger, at

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x;$$

en forening af åbne mængder og dermed selv åben. □

[S], Opgave 5.9.4. Lad $(\mathbb{R}^n, d)$ være euklidisk rum. Find randen $\partial B(x, r)$, det indre $\operatorname{int} B(x, r)$ og afslutningen $\overline{B(x, r)}$, samt de samme størrelser for $\overline{B}(x, r)$

Løsning. Da $B(x, r)$ er åben, er $\operatorname{int} B(x, r) = B(x, r)$. Vi finder, at et punkt $y \in \mathbb{R}^n$ er indre i $\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)$, hvis og kun hvis $d(x, y) > r$: Hvis $d(x, y) > r$, er $B(y, r - d(x, y)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(x, r)$, så y er indre i mængden, men hvis $d(x, y) = r$, vil en hvilken som helst kugle $B(y, s)$ om y indeholde punkter fra $B(x, r)$, tag f.eks. punktet $y + (x - y)\frac{\min(r,s)}{2d(x,y)}$. Med andre ord er

$$\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) > r\}.$$

Vi finder, at

$$\begin{aligned} \overline{B(x, r)} &= \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)) = \overline{B}(x, r), \\ \partial B(x, r) &= \overline{B(x, r)} \setminus \operatorname{int} B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) = r\}. \end{aligned}$$

Da afslutningen af en mængde er den mindste lukkede mængde, der indeholder mængden, og da $\overline{B}(x, r)$ er lukket, er $\overline{\overline{B}(x, r)} = \overline{B}(x, r)$. Da kuglen er lukket, er dens komplement åbent, så $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x, r)) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x, r)$. Som ovenfor kan vi finde, at $\operatorname{int} \overline{B}(x, r) = B(x, r)$, og at randen bliver $\partial \overline{B}(x, r) = \partial B(x, r)$. ■