GEOMETRI-TØ, UGE 5

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til `fuglede@imf.au.dk`.

Opvarmningsopgave 1. Vis at et metrisk rum har Hausdorffegenskaben: Hvis x og y er to forskellige punkter, så findes disjunkte åbne mængder U og V, så $x \in U$, $y \in U$.

Bevis. Lad $d = d(x, y)$, og sæt $U = B(x, \frac{d}{2})$, $V = B(y, \frac{d}{2})$. Så er det klart, at $x \in U$ og $y \in V$, og antag for modstrid, at der findes et $z \in U \cap V$. Da gælder

$$d(x, z) + d(y, z) < \tfrac{d}{2} + \tfrac{d}{2} = d = d(x, y)$$

i modstrid med trekantsuligheden. □

Opvarmningsopgave 2. Lad (X, d) være et metrisk rum og $f : X \to \mathbb{R}$ en afbildning. Vis at f er kontinuert, hvis og kun hvis der for alle $a < b$ gælder, at mængden

$$f^{-1}((a, b)) = \{x \in X \mid a < f(x) < b\}$$

er åben.

Bevis. Hvis f er kontinuert, er $f^{-1}((a, b))$ åben pr. [S, Stn. 3.7]. Antag omvendt, at $f^{-1}((a, b))$ er åben for alle $a < b$. Lad $\varepsilon > 0$ og $x \in X$ være givet. Pr. antagelse er mængden

$$U_\varepsilon = f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$$

åben, og den indeholder x, så vælg $\delta > 0$, så $B(x, \delta) \subseteq U_\varepsilon$. Da gælder for alle $y \in B(x, \delta)$ (eller m.a.o. alle y med $d(x, y) < \delta$), at $y \in U_\varepsilon$, hvilket i termer af f, betyder at $f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, eller, med andre ord, at $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, hvilket vil sige, at f er kontinuert. □

Bevis #2. Ovenfor brugte vi den ene vej af [S, Stn. 3.7] og genbeviste næsten den anden. Hvis man synes, at det er for fesent, kan man også tænke på kontinutitet udelukkende i termer af urbilleder: Lad os igen antage, at urbilledet at ethvert interval er åbent og vise, at det medfører, at f er kontinuert. Lad til formålet $U \subseteq \mathbb{R}$ være en åben mængde. Ved at bruge, at enhver åben mængde i et metrisk rum kan skrives som en forening af åbne kugler (tag f.eks. blot en åben kugle om hvert punkt i mængden, kuglen selv helt indeholdt i mængden), kan vi skrive $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, hvor hvert U_α er et interval. Så er $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$. Pr. antagelse er $f^{-1}(U_\alpha)$ åben for alle α, og da foreninger af åbne mængder er åbne, er $f^{-1}(U)$ hermed åben, og f er kontinuert if. [S, Stn. 3.7]. □

Opvarmningsopgave 3. Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Vis at f er differentiabel i alle punkter $x_0 \in \mathbb{R}^2$ og beregn dens Jacobimatrix.

Bevis. For at vise, at f er differentiabel i et givet punkt x_0 er det ifølge [S, Stn. 4.20] nok at vise, at de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ findes for alle $x \in \mathbb{R}^2$ og er kontinuerte i x_0. Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1,$$

som klart er kontinuerte i alle punkter i $\mathbb{R}^2$. Jacobimatricen i punktet (x_1, x_2) er ifølge [S, Prop. 4.15] givet ved 1×2-matricen

$$Jf_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

□

Opvarmningsopgave 4. Antag at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel og at $|f'(x)| < \frac{1}{2}$. Antag også at hvis $0 \le x \le 1$, så er $0 \le f(x) \le 1$. Vis at der findes et og kun et tal $x \in [0, 1]$ så $f(x) = x$.

Bevis. Vi påstår, at funktionen $f|_{[0,1]} : [0,1] \to [0,1]$ er en kontraktion med kontraktionsfaktor $\beta = \frac{3}{4}$. Da følger resultatet af Banachs fikspunktssætning, [S, Stn. 3.23], da $[0,1]$ er et fuldstændigt metrisk rum (som en lukket delmængde af det fuldstændige metriske rum $\mathbb{R}$). Ved at bruge middelværdisætningen [S, Stn. 4.17] med $m = 1$, $U = \mathbb{R}$, $a, b \in [0,1]$, får vi, at

$$|f(a) - f(b)| \leq |a - b| \sup_{z \in [a,b]} \|[f'(z)]\| \leq \frac{1}{2}|a - b|,$$

men her står, at f er en kontraktion med kontraktionsfaktor β, hvor vi selv har lov at vælge $\frac{1}{2} < \beta < 1$. □

[S], Opgave 3.4.8. Definer operatornormen på $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ved

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Vis at dette definerer en norm.

Bevis. Først bør man overveje, hvorfor højresiden er endelig. Lad $x \in \mathbb{R}^n$ med $\|x\| \leq 1$. Hvis vi i standardbasen har $x = \sum x_i e_i$, $|x_i| < 1$ for alle i, og $A = (a_{ij})_{i,j}$, så er

$$\|Ax\| = \|\sum_{i,j} a_{ij} x_j e_i\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij} x_j e_i\| = \sum_{i,j} |a_{ij} x_j| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|,$$

så her står, at $\|Ax\|$ er begrænset oppefra af en konstant uafhængig af x, så specielt er $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ veldefineret.

Det er klart, at normen er ikke-negativ. Hvis $\|A\| = 0$, er $\|Ax\| = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ med $\|x\| = 1$, så specielt gælder, at $Ae_i = 0$ for standardbasisvektorerne i $\mathbb{R}^n$, men da Ae_i netop er den i'te søjlevektor i A, må det betyde, at $A = 0$.

Lad $\lambda \in \mathbb{R}$. Da er

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

Fra trekantsuligheden på $\mathbb{R}^n$ får vi for to matricer A og B, at

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

□

[S], Opgave 3.4.9. Vis at operatornormen opfylder

$$\|A\| = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ for alle } x \in \mathbb{R}^n\},$$

og at normen er submultiplikativ: At der gælder $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Bevis. Betegn mængden i højresiden med symbolet D. For alle $x \in \mathbb{R}^n$ med $\|x\| = 1$ gælder pr. definition af operatornormen, at $\|Ax\| \leq \|A\|$. Specielt får vi, ved at bruge den ulighed på $\frac{x}{\|x\|}$, at der for alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, uanset vektorens længde, gælder, at

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \tag{1}$$

og uligheden gælder tydeligvis også for $x = 0$. Her står, at $\|A\| \in D$, eller med andre ord, at $\|A\| \geq \inf D$. Vi er derfor færdige, hvis vi kan vise, at $\|A\| \leq \inf D$. Lad $c \in D$ være vilkårlig, og lad os vise, at $\|A\| \leq c$. Dette følger direkte ved at tage $\sup_{\|x\|=1}$ i uligheden $\|Ax\| \leq c\|x\|$, idet vi husker, at inf er en grænseværdi og derfor bevarer uligheden.

Af (1) følger også, at der for alle $x \in \mathbb{R}^n$ med $\|x\| = 1$ gælder

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| = \|A\|\|B\|,$$

så ved igen at tage $\sup_{\|x\|=1}$, får vi, at $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. □

[S], Opgave 3.4.10. Overvej hvornår en række $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ i et fuldstændigt vektorrum er konvergent. Vis at det er tilfældet, hvis $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$ er konvergent.

Bevis. At rækken er konvergent vil sige, at afsnitsfølgen $\sum_{k=1}^{n} v_k$ er konvergent. Da vektorrummet er fuldstændigt, kan denne betingelse oversættes til, at afsnitsfølgen er Cauchy.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da afsnitsfølgen $s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \|v_k\|$ er konvergent, og dermed Cauchy, da de reelle tal er fuldstændige, findes et N, så $|s_n - s_m| < \varepsilon$ for $n, m \geq N$. Lad $n, m \geq N$ og antag uden tab af generalitet, at $n \geq m$. Da følger af trekantsuligheden, at

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{m} v_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|v_k\| = s_n - s_m < \varepsilon.$$

□

Opgave A. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben, lad $a \in U$ og lad $f : U \to \mathbb{R}$ være differentiabel i a. Antag at $f(a) \leq f(x)$ for alle x i en omegn af $a \in U$ og vis at $Df_a = 0$.

Bevis. Vi vil vise, at alle de retningsafledede af f er 0. Lad $v \in \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig enhedsvektor i $\mathbb{R}^n$ og sæt $\gamma(t) = a + tv$. Da gælder for t tilstrækkeligt tæt på 0, at $\gamma(t) \in U$, så $f \circ \gamma$ giver mening. Ved at bruge definition af Df_a, [S, s. 27], med $x_0 = a$, $x = a + tv$, er

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|f(a+tv) - f(a) - Df_a(tv)\|}{\|tv\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|f(a+tv) - f(a) - tDf_a(v)\|}{|t|} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{|t|} - \frac{t}{|t|} Df_a(v) \right\| = \left\| \lim_{t\to 0^+} \frac{f\circ\gamma(t) - f\circ\gamma(0)}{t} - Df_a(v) \right\| \\ &= \|(f\circ\gamma)'(0) - Df_a(v)\|. \end{aligned}$$

Altså er $Df_a(v) = (f \circ \gamma)'(0)$, men denne er 0, da 0 er et lokalt minimum for $f \circ \gamma$. Da v var en vilkårlig enhedsvektor, er $Df_a = 0$. □

Opgave B. Lad p være et positivt helt tal, og lad $W \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben. Lad $f : W \to \mathbb{R}^n$ være en differentiabel afbildning, som tilfredsstiller, at $f(rx) = r^p f(x)$ for $r \in \mathbb{R}$ og $x \in W$, så $rx \in W$. Vis at $Df_x(x) = pf(x)$ for alle $x \in W$.

Opgaven her er lidt pudsig: Det er meget sjældent, at man har brug for at bruge punktet x, som man afleder funktionen i, som argument i differentialet. Nuvel.

Bevis. Påstænden gælder i $x = 0$: Da Df_x er lineær for alle x, er $Df_0(0) = 0$, mens f selv opfylder $f(0) = r^p f(0)$ for alle r, så $f(0) = 0$ og $pf(0) = 0$.

For $x \neq 0$ giver definitionen på differentiabilitet, at

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\to 1^+} \frac{\|f(rx) - f(x) - Df_x((r-1)x)\|}{\|(r-1)x\|} = \frac{1}{\|x\|} \lim_{r\to 1^+} \left\| \frac{r^p f(x) - f(x)}{r-1} - Df_x(x) \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} \left\| \lim_{r\to 1^+} \frac{r^p - 1}{r-1} f(x) - Df_x(x) \right\|. \end{aligned}$$

Da der som bekendt gælder, at $\frac{r^p-1}{r-1} = 1 + r + \cdots + r^{p-1}$, står her, at $\|pf(x) - Df_x(x)\| = 0$ som ønsket. □