GEOMETRI-TØ, UGE 4

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad $\gamma, \tilde{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ være to kurver med fart 1, som opfylder, at $\kappa = \tilde{\kappa} > 0$ og $\tau = \tilde{\tau}$. Vis at $\|\gamma(t) - \gamma(0)\| = \|\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)\|$.

Bevis. Ifølge entydighedsdelen af kurveteoriens hovedsætning , [P, Thm. 2.3.6], findes en direkte isometri (også kaldet en stiv flytning) M, så $\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s))$. Specielt gælder for alle $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, at

$$\|\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_2)\| = \|M\gamma(t_1) - M\gamma(t_2)\| = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|.$$

□

Opvarmningsopgave 2. Lad $\mathcal{D} = \{(t, x) \mid x \neq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lad $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ være den konstante funktion $f(t, x) = 1$. Findes der en glat løsning $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ til differentialligningen $x'(t) = f(t, x(t))$ med begyndelsesbetingelse $x(0) = 1$ defineret for alle $t \in \mathbb{R}$?

Svar. Der findes en lokal løsning $x_0 : (-1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ givet ved $x_0(t) = t + 1$. Ifølge [S, Sætn. 2.5] vil enhver løsning $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stemme overens med x_0 på intervallet $(-1, \infty)$ og pr. kontinuitet opfylde, at

$$x(-1) = \lim_{t \to -1^+} x(t) = \lim_{t \to -1^+} x_0(t) = \lim_{t \to -1^+} t + 1 = 0,$$

så ingen sådan løsning x kan eksistere. ■

Opvarmningsopgave 3. Lad X være en mængde med to metrikker d_1 og d_2. Lad $f : (X, d_1) \to (X, d_2)$ være identitetsafbildningen, $f(x) = x$. Vis at hvis d_1 og d_2 er ækvivalente, da er f en homøomorfi.

Bevis. Det er klart, at f er bijektiv med invers $f^{-1}(x) = x$. Vi skal vise, at f og f^{-1} er kontinuerte afbildninger. Lad $x \in X$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Da d_1 og d_2 er ækvivalente findes da $\delta_1, \delta_2 > 0$, så $B_{d_1}(x, \delta_1) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$ og $B_{d_2}(x, \delta_2) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon)$, men her står jo netop, at hvis $y \in X$ opfylder, at $d_1(x, y) < \delta_1$, så er $d_2(f(x), f(y)) = d_2(x, y) < \varepsilon$, og omvendt, at hvis $d_2(x, y) < \delta_2$, så er $d_1(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d_1(x, y) < \varepsilon$, hvilket betyder, at f og f^{-1} er kontinuerte. □

Bemærk her, at det modsatte også gælder: Hvis man skriver ud, hvad det vil sige, at identitetsafbildningen er en homøomorfi med hensyn til to givne metrikker, får man præcis betingelsen for, at de to metrikker er ækvivalente.

Opvarmningsopgave 4. Lad $\mathbb{R}^2$ have metrikken induceret af det sædvanlige indre produkt. Vis at enhedscirklen $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ med den nedarvede metrik er et fuldstændigt metrisk rum.

Bevis. Dette følger direkte af [S, Lemma 3.20], der siger, at lukkede delmængder af fuldstændige metriske rum selv er fuldstændige. □

[P], Opgave 2.3.2. Beskriv alle kurver i $\mathbb{R}^3$ med konstant krumning $\kappa > 0$ og konstant torsion τ.

Beskrivelse. Idéen i opgaven er simple nok: Hvis τ var konstant lig 0, ville kurven være plan, og plane kurver med konstant positiv krumning er (delmængder af) cirkler. Her er torsionen potentielt forskellig fra 0, og det første gæt er, at kurven nok er en (delmængde) af en (stiv flytning af en) helix.

Vi får derfor den idé at vælge $a > 0$ og $b \in \mathbb{R}$ ved

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Med disse valg er

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2},$$

og vi får, at

$$\frac{a}{a^2 + b^2} = \kappa, \quad \frac{b}{a^2 + b^2} = \tau.$$

Med andre ord har vores kurve samme krumning og torsion som helixen fra [P, Ex. 2.3.2], og ifølge kurveteoriens hovedsætning er kurver i rummet bestemt af deres krumning og torsion op til en direkte isometri. ■

En sidebemærkning her er, at direkte isometrier naturligt kan betragtes som gruppen af symmetrier af det 3-dimensionale rum. At en sammensætning af to direkte isometrier selv er en direkte isometri (og at de derfor udgør en gruppe) er ikke helt klart, da rotationer og translationer kommer til at spille sammen på en bestemt måde. Gruppen betegnes ofte $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{O}(3)$, hvor tegnet $\rtimes$ indikerer, at gruppestrukturen involverer begge faktorer; produktet kaldes „semidirekte“. Her har vi også brugt notationen $\mathrm{O}(n)$, der er en forkortelse for gruppen af ortogonale $n \times n$-matricer. I generel relativitetsteori betragter man ofte en 4-dimensional analog $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{O}(1,3)$, der kaldes „Poincarégruppen“.

[P], Opgave 2.3.5. Lad $P \in \mathrm{O}(3)$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ så $M(\mathbf{v}) = P\mathbf{v} + \mathbf{a}$ er en isometri af $\mathbb{R}^3$. Vis at hvis γ er en fart 1-kurve i $\mathbb{R}^3$, så er kurven $\Gamma = M(\gamma)$ også fart 1. Vis også, at hvis $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ betegner tangent, hovednormal og binormal af de to kurver, da er $\mathbf{T} = P\mathbf{t}$, $\mathbf{N} = P\mathbf{n}$ og $\mathbf{B} = (\det P)P\mathbf{b}$.

Bevis. For at opgaven skal give mening, må vi nok hellere antage, at $\kappa_\gamma > 0$.

Husk at lineære afbildninger $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ opfylder, at $(L \circ f)'(t) = L \circ f'(t)$ for alle differentiable afbildninger $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$: Dette ses lettest ved at betragte L som matrixmultiplikation og betragte begge sider af ligningen indgangsvist.

Specielt gælder i vores tilfælde, at

$$\|\Gamma'(t)\| = \|(P\gamma(t) + a)'\| = \|P(\gamma'(t))\| = \|\gamma'(t)\| = 1$$

hvor vi også har brugt, at P er ortogonal. Det viser opgavens første påstand. På samme måde har vi

$$\mathbf{T} = \Gamma'(t) = P\gamma'(t) = P\mathbf{t}.$$

Hvad angår kurvernes krumning gælder

$$\kappa_\Gamma = \|\Gamma''\| = \|(P(\gamma) + a)''\| = \|P(\gamma'')\| = \kappa_\gamma,$$

og dermed gælder om normalvektorerne, at

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa_\Gamma}\mathbf{T}' = \frac{1}{\kappa_\gamma}P\mathbf{t}' = P\mathbf{n}.$$

Endelig får vi ved at bruge ugeseddelopgaven fra første ugeseddel, at

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = (P\mathbf{t}) \times (P\mathbf{n}) = \det(P)P(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \det(P)P\mathbf{b}.$$

□

[S], Opgave 3.4.1. Lad X være en mængde og $d : X \times X \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq y, \\ 0 & \text{for } x = y \end{cases}.$$

Vis at (X, d) er et metrisk rum.

Bevis. Vi følger slavisk definitionen på et metrisk rum: At $d \geq 0$ og at $d(x,y) = 0$, hvis og kun hvis $x = y$ er oplagt. At d er symmetrisk er også klart, og at

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

for $x, y, z \in X$ følger af, at uligheden er oplagt, hvis højresiden er positiv, og at højresiden kun er 0, hvis $x = y = z$. □

Metrikken (og dens topologi) kaldes ofte den diskrete, da *alle* delmængder af X er åbne. Dette betyder specielt, at alle funktioner fra X ind i et andet metrisk rum (eller topologisk rum) er kontinuerte (urbilleder af åbne mængder bliver altid åbne), og at metrikken er særdeles uegnet til studiet af kontinuitet.

[S], Opgave 3.4.2. Lad (X,d) være et metrisk rum og $a > 0$. Lad $d_a : X \times X \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$d_a(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{for } d(x,y) < a, \\ a & \text{for } d(x,y) \geq a \end{cases} = \min(d(x,y), a).$$

Vis at (X, d_a) er et metrisk rum, og at d og d_a er ækvivalente.

Bevis. At d_a er positiv, tro og symmetrisk følger af, at d er det. Trekantsuligheden kan vi tjekke som i den forrige opgave: Hvis højresiden er større end a, er trekantsuligheden oplagt. Hvis omvendt $d_a(x,y) + d_a(y,z) < a$, må der gælde, at $d_a(x,y) < a$ og $d_a(x,y) < a$. Det betyder, at $d_a(x,y) = d(x,y)$, og at $d_a(y,z) = d(y,z)$, så

$$d_a(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d_a(x,y) + d(y,z).$$

Lad os se, at metrikkerne er ækvivalente. Vi skal med andre ord for alle $x \in X$, $\varepsilon > 0$ finde $\delta > 0, \delta' > 0$, så

$$B_d(x,\delta) \subseteq B_{d_a}(x,\varepsilon), \quad B_{d_a}(x,\delta') \subseteq B_d(x,\varepsilon).$$

Lad derfor $x \in X$, $\varepsilon > 0$ være givet. Sæt $\delta = \varepsilon$. Da får vi for $y \in B_d(x,\delta)$, at

$$d_a(x,y) \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon,$$

så $y \in B_{d_a}(x,\varepsilon)$. Sæt omvendt $\delta' = \min(a,\varepsilon)$. Så gælder for $y \in B_{d_a}(x,\delta')$, at

$$d(x,y) = d_a(x,y) < \delta' \leq \varepsilon,$$

hvor første lighed følger af, at $d(x,y) < a$. □

At d og d_a er ækvivalente er måske en smule overraskende: De åbne kugler $B_{d_a}(x,r)$ bliver til hele X, når $r > a$, så man kunne forestille sig, at rummet pludselig har betragteligt færre åbne mængder. Man kan derfor tænke som resultatet som sigende, at metrikkens egenskaber gør studiet af kontinuitet fuldstændig lokalt: Kun hvad der sker i små omegne omkring punkter er afgørende for rummets metriske udseende.

[S], Opgave 3.4.4. Vis at en vilkårlig forening af åbne mængder i et metrisk rum selv er åben, og at et endeligt snit af åbne mængder er åbent.

Bevis. Lad U_α, $\alpha \in A$ være en forening af åbne mængder og lad $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Da findes et $\alpha \in A$, så $x \in U_\alpha$. Da U_α er åben, findes et $\varepsilon > 0$, så $B_d(x,\varepsilon) \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Her står, at $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ er åben.

Betragt nu åbne mængder $U_1, \ldots, U_n$, og lad $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. For hvert $i = 1, \ldots, n$ er $x \in U_i$, så vælg for hvert i et ε_i, så $x \in B_d(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Sæt $\varepsilon = \min \varepsilon_i$. Da er $B_d(x,\varepsilon) \subseteq U_i$ for alle i, og specielt er $B_d(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$ som ønsket. □

[S], Opgave 3.4.5. Vis at åbne kugler $B(x,r)$ er åbne.

Bevis. Lad $y \in B(x,r)$ og sæt $\varepsilon = r - d(x,y)$. Da gælder for alle $z \in B(y,\varepsilon)$, at

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + (r - d(x,y)) = r,$$

så $B(y,\varepsilon) \subseteq B(x,r)$. □