GEOMETRI-TØ, UGE 3

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ være en regulær kurve i planen. Vis at hvis $\gamma'(t)$ og $\gamma''(t)$ lineært afhængige, så er $\kappa(t) = 0$.

Bevis. Fra [P] Proposition 2.1.2 får vi, at

$$\kappa = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3} = 0$$

Her kunne man potentielt bekymre sig over, at kurven i propositionen er en kurve i rummet, mens vores givne ligger i planen, men en hvilken som helst kurve i planen kan betragtes som en kurve i rummet: Hvis $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, betragter vi blot kurven $(x(t), y(t), 0)$. De to kurver vil da have samme krumning. □

Opvarmningsopgave 2. Lad $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ være en regulær kurve i rummet med ikkeforsvindende krumning. Vis at hvis $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ og $\gamma'''(t)$ er lineært afhængige, så er torsionen $\tau(t) = 0$.

Bevis. Fra forrige opgave kan vi konkludere, at $\gamma'(t)$ og $\gamma''(t)$ ikke er lineært afhængige, så $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ er en ikke-nul vektor vinkelret på begge. Da $\gamma'''(t)$ tilhører $\mathrm{span}(\gamma'(t), \gamma''(t))$, er

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = 0,$$

og resultatet følger fra [P] Proposition 2.3.1, der siger, at

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.$$

□

Opvarmningsopgave 3. Lad $\gamma : (0, 10\pi) \to \mathbb{R}^2$ være den plane kurve $(\cos(2t), \sin(2t))$. Vis at γ er periodisk med periode π. Beregn den totale krumning med fortegn af γ.

Bevis. Den del af opgaven, der omhandler periode, er en smule mærkelig, da begrebet "periodisk" som udgangspunkt kun er defineret for kurver, der er defineret på hele $\mathbb{R}$. Man kan dog forsøge at redde definitionen ved at kalde en kurve $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ T-periodisk, hvis

$$\gamma(t) = \gamma(t + T)$$

for alle t så $t, t + T \in (\alpha, \beta)$, og vi kan definere perioden til at være det mindste $T > 0$, der opfylder den ligning.

I så fald er det klart, at $T = \pi$ virker til formålet ved os, og det følger fra opgaven om injektiviteten af parametriseringen af ellipsen fra uge 1, at intet mindre T kan virke.

Husk at krumningen med fortegn – af en kurve parametriseret ved buelængde – er funktionen κ_s, der opfylder

$$\gamma'' = \kappa_s \mathbf{n}_s,$$

så vi får brug for at udregne størrelserne i denne ligning; for en generel kurve parametriseres den først ved buelængde. Bemærk først, at vores kurve γ *ikke* er parametriseret ved buelængde, men at buelængden den reparametriserede kurve

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tfrac{1}{2}s) = (\cos(s), \sin(s))$$

er det. Lad os derfor prøve at finde krumningen med fortegn for $\tilde{\gamma}$. Vi skal blot udregne $\tilde{\gamma}''$ og $\mathbf{n}_s$. Først og fremmest finder vi, at

$$\mathbf{t}(s) = \tilde{\gamma}'(s) = (-\sin(s), \cos(s)),$$

så
$$\tilde{\gamma}''(s) = (-\cos(s), -\sin(s)),$$
og
$$\mathbf{n}_s(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = (-\cos(s), -\sin(s)),$$
så vi kan aflæse, at κ_s er den konstante funktion $\kappa_s(s) = 1$.

Nu kunne man så med rette spørge sig selv, hvad der var sket, hvis vi havde valgt en anden reparametrisering. F.eks. er kurven $\hat{\gamma}(s) = \gamma(-\frac{1}{2}s)$ et andet fint valg af reparametrisering, men for denne er $\kappa_s(s) = -1$, som man kan se ved direkte udregning som ovenfor; κ_s har altså skiftet fortegn. Husk nu, at [P] Korollar 1.3.7 fortæller os alle mulige reparametriseringer, og man kan hurtigt konkludere, at dette er så galt som det kan gå: Ved at vælge en reparametrisering hvis tangent peger i samme retning som den oprindelige kurve (det vil sige $\tilde{\gamma}$ i vores tilfælde), kan man veldefinere κ_s. □

Opvarmningsopgave 4. Lad $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ være givet ved $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$. Lad $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), -\gamma_3(t))$. Antag at γ er regulær med ikkeforsvindende krumning. Vis at det samme gælder $\tilde{\gamma}$, og at torsionerne for de to kurver er relaterede ved $\tau(t) = -\tilde{\tau}(t)$.

Bevis. Lad os for overskuelighedens skyld antage, at γ er parametriseret ved buelængde (hvis det ikke er tilfældet, vælger man blot en reparametrisering, der er), så vi kan bruge [P] Definition 2.1.1 direkte. Ved at differentiere kurverne finder vi, at $1 = \|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(t)\|$ og $0 \neq \|\gamma''(t)\| = \|\tilde{\gamma}''(t)\|$ for alle t. Her står, at $\tilde{\gamma}$ er regulær, parametriseret ved buelængde, og har krumning forskellig fra 0.

Vi kunne nu appellere til [P] Proposition 2.3.1 igen, men lad os, for at prøve noget andet, bare bruge definitionerne. Husk at hovednormalvektoren pr. definition er $\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{t}'(s)$, så hvis vi sætter $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, er $\tilde{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, -n_3)$. Husk også, at binormalen er $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, så skriver vi $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, er $\tilde{\mathbf{b}} = (-b_1, -b_2, b_3)$, og specielt er $\tilde{\mathbf{b}}' = (-b_1', -b_2', b_3')$. Pr. definition er torsionen τ givet ved $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$, og af ovenstående ligninger følger, at $\tilde{\mathbf{b}}' = \tau\tilde{\mathbf{n}}$, så $\tilde{\tau} = -\tau$. □

[P], Opgave 2.1.2. Vis at hvis $\kappa(t)$ af en regulær kurve γ er > 0 overalt, så er $\kappa(t)$ en glat funktion i t. Giv et eksempel der viser, at det kan gå galt, hvis $\kappa(t) = 0$ for et t.

Bevis. Vi ved fra Proposition 2.1.2, at
$$\kappa = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3},$$
så spørgmålet er, for hvilke $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ der gælder, at funktionen $t \mapsto \|f(t)\|$ er glat. Da dette blot er en sammensætning af et polynomium med en kvadratrod virker dette, når f er glat og $f(t) > 0$ for alle t, hvilket i vores opgave er præcis hvad vi har sikret.

Et modeksempel er kurven $\gamma(t) = (t, t^3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Denne er regulær, da
$$\gamma'(t) = (1, 3t^2, 0) \neq 0$$
og har krumning
$$\kappa(t) = \frac{\|(0, 6t, 0) \times (1, 3t^2, 0)\|}{\|(1, 3t^2, 0)\|^3} = \frac{\|0, 6t, 0\|}{(1 + (3t^2)^2)^{3/2}} = \frac{|6t|}{(1 + 9t^4)^{3/2}},$$
som ikke er glat i $t = 0$, da $|6t|$ ikke er det. Konkret er krumningens afledede
$$\kappa'(t) = -\frac{324t^3|t|}{(1 + 9t^4)^{5/2}} + \frac{6\mathrm{sgn}(t)}{(1 + 9t^4)^{3/2}}$$
ikke kontinuert i $t = 0$. □

[P], Opgave 2.2.1. Vis at hvis γ er en plan kurve parametriseret ved buelængde, så er $\mathbf{n}_s' = -\kappa_s\mathbf{t}$. Sammenlign med Frenet-Serret-ligningerne

Bevis. I sådanne opgaver er der altid næsten altid én mulighed: Tag en ligning, der minder om det ønskede og differentier den for at få de relevante størrelser. I vores tilfælde er en mulighed ligningen $0 = \mathbf{n}_{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{t}$. Ved brug af produktreglen får vi

$$0 = \mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_{\mathrm{s}} \cdot \gamma'' = \mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n}_{\mathrm{s}} \cdot (\kappa_{\mathrm{s}} \mathbf{n}_{\mathrm{s}}),$$

så med andre ord er

$$-\kappa_{\mathrm{s}} = \mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{t}$$

Ved at differentiere $\mathbf{n}_{\mathrm{s}} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{s}} = 1$, får vi at $\mathbf{n}_{\mathrm{s}}'$ er vinkelret på $\mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ og derfor parallel med $\mathbf{t}$. I ortonormalbasen $(\mathbf{t}, \mathbf{n}_{\mathrm{s}})$ er altså

$$\mathbf{n}_{\mathrm{s}}' = (\mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{s}})\mathbf{n}_{\mathrm{s}} = (\mathbf{n}_{\mathrm{s}}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = -\kappa_{\mathrm{s}} \mathbf{t},$$

som ønsket. Husk at den ene af Frenet-Serret-ligningerne for kurver i rummet er

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

For plane kurver forsvinder τ, så ligningen her ligner vores til forveksling. □

[P], Opgave 2.2.2. Vis at krumningen med fortegn af en regulær plan kurve er glat.

Bevis. Ved at prikke med $\mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ på begge sider af ligningen $\gamma'' = \kappa_{\mathrm{s}} \mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ får vi

$$\kappa_{\mathrm{s}} = \gamma'' \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{s}}.$$

Her er γ'' glat, da γ er det, og $\mathbf{n}_{\mathrm{s}}$ er ligeledes glat, da det er en sammensætning af den glatte funktion $\mathbf{t} = \gamma'$ med en lineær afbildning (rotation med π). Endelig er prikproduktet af to glatte afbildninger altid glat. □

[P], Opgave 2.2.5. Lad γ være en regulær plan kurve og λ en konstant. Den *parallelle kurve* γ^λ til γ er defineret til at være

$$\gamma^\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{n}_{\mathrm{s}}(t).$$

Vis at hvis $\lambda\kappa_{\mathrm{s}}(t) \neq 1$ for alle værdier af t, så er γ^λ en regulær kurve, og dens krumning med fortegn er $\kappa_{\mathrm{s}}/|1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}}|$.

Bevis. Lad $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ betegne rotationsmatricen $\mathbf{n}_{\mathrm{s}} = R(\mathbf{t})$. Her og i det følgende evalueres alle funktionsudtryk i et punkt t, der udelades for at gøre løsningen lidt mere overskuelig. Lad os finde længden af den afledede af γ^λ, altså $\frac{\mathrm{d}s^\lambda}{\mathrm{d}t}$, hvor s^λ betegner buelængden af γ^λ. Vi kunne gøre livet en smule lettere for os selv ved at antage, at γ er parametriseret ved buelængde, så $\mathbf{t} = \gamma'$, men da det ikke gør den store forskel, betragter vi bare en generel regulær kurve γ. Under alle omstændigheder har vi, at $\kappa_{\mathrm{s}} \mathbf{n}_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s}$, og

$$\frac{d}{dt}\mathbf{n}_{\mathrm{s}} = \frac{d}{dt}(R(\mathbf{t})) = R(\frac{d}{dt}\mathbf{t}) = R(\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt}) = R(\kappa_{\mathrm{s}}\frac{ds}{dt}\mathbf{n}_{\mathrm{s}}) = -\kappa_{\mathrm{s}}\frac{ds}{dt}\mathbf{t},$$

hvor vi til sidst har indsat $\mathbf{n}_{\mathrm{s}} = R(\mathbf{t})$ igen og brugt at $R^2 = -\mathrm{Id}$. Den afledede af γ^λ bliver da

$$\frac{d}{dt}\gamma^\lambda = \gamma' + \lambda \mathbf{n}_{\mathrm{s}}' = \frac{ds}{dt}\mathbf{t} - \lambda\kappa_{\mathrm{s}}\frac{ds}{dt}\mathbf{t}.$$

Længden af denne bliver altså

$$\frac{ds^\lambda}{dt} = \left\|\frac{d}{dt}\gamma^\lambda\right\| = \left\|(1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}})\frac{ds}{dt}\mathbf{t}\right\| = |1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}}|\frac{ds}{dt},$$

og denne er forskellig fra nul, hvis og kun hvis $\lambda\kappa_{\mathrm{s}} \neq 1$, da vi ved, at $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \neq 0$.

Antag nu, at dette er tilfældet og lad os finde krumningen med fortegn. Hertil får vi brug for

$$\mathbf{t}^\lambda = \frac{d\gamma^\lambda/dt}{ds^\lambda/dt} = \frac{(1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}})\mathbf{t}}{|1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}}|} = \varepsilon \mathbf{t},$$

hvor $\varepsilon = \mathrm{sgn}(1 - \lambda\kappa_{\mathrm{s}})$ er konstant. Ligeledes får vi

$$\mathbf{n}^\lambda = R(\mathbf{t}^\lambda) = R(\varepsilon\mathbf{t}) = \varepsilon R(\mathbf{t}) = \varepsilon \mathbf{n}.$$

Alt i alt får vi

$$\begin{aligned}\kappa_s^\lambda \mathbf{n}_s^\lambda &= \frac{d\mathbf{t}^\lambda/dt}{ds^\lambda/dt} = \frac{\varepsilon\, d\mathbf{t}/dt}{|1-\lambda\kappa_s|\, ds/dt} = \frac{\varepsilon}{|1-\lambda\kappa_s|}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\\ &= \frac{\varepsilon}{|1-\lambda\kappa_s|}\kappa_s\mathbf{n}_s = \frac{\kappa_s}{|1-\lambda\kappa_s|}\mathbf{n}_s^\lambda,\end{aligned}$$

og her står altså, at

$$\kappa_s^\lambda = \frac{\kappa_s}{|1-\lambda\kappa_s|}.$$

□

[P], Opgave 2.2.6. Lad γ være en plan kurve parametriseret ved buelængden. Vis at centrum $\varepsilon^{\delta s}(s_0)$ af cirklen gennem $\gamma(s_0)$ og $\gamma(s_0 \pm \delta s)$ går mod

$$\varepsilon(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa_s(s_0)}\mathbf{n}_s(s_0).$$

Vis at radius af cirklen gennem $\gamma(s_0)$ med centrum $\varepsilon(s_0)$ er $1/|\kappa(s_0)| = 1/\kappa(s_0)$.

Bevis. Punktet $\varepsilon(s_0)$ opfylder (tegning)

$$(\varepsilon^{\delta s}(s_0) - \tfrac{1}{2}(\gamma(s_0) + \gamma(s_0+\delta s))) \cdot (\gamma(s_0+\delta s) - \gamma(s_0)) = 0.$$

Den centrale idé i resten af beviset er at udnytte Taylors formel, der siger at

$$\gamma(s_0+\delta s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(\delta s) + \frac{\gamma''(s_0)}{2}(\delta s)^2 + h(\delta s)(\delta s)^2,$$

hvor $h(\delta s) \to 0$, når $\delta s \to 0$. Indsættes dette i ligningen ovenfor, får vi til anden orden (dvs. hvis vi ignorerer alle led, der involverer h), idet alle evalueringer er i punktet s_0, at

$$\begin{aligned}0 &= (\varepsilon^{\delta s} - \tfrac{1}{2}(\gamma + \gamma + \gamma'\cdot\delta s + \frac{\gamma''}{2}(\delta s)^2)) \cdot (-\gamma + \gamma + \gamma'\delta s + \frac{\gamma''}{2}(\delta s)^2)\\ &= (\varepsilon^{\delta s} - \gamma - \frac{1}{2}\gamma'\delta s - \frac{\gamma''}{4}(\delta s)^2)(\gamma'\delta s + \frac{\gamma''}{2}(\delta s)^2)\\ &= (\varepsilon^{\delta s} - \gamma)\cdot\gamma'\delta s + (\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\delta s}\cdot\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma\cdot\gamma'' - \tfrac{1}{2}\gamma'\cdot\gamma')(\delta s)^2 + \cdots\\ &= (\varepsilon^{\delta s} - \gamma)\cdot\gamma'\delta s + \tfrac{1}{2}(\varepsilon^{\delta s}\cdot\gamma'' - \gamma\cdot\gamma'' - 1)(\delta s)^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Ligeledes har vi, at

$$0 = (\varepsilon^{\delta s}(s_0) - \tfrac{1}{2}(\gamma(s_0) + \gamma(s_0 - \delta))) \cdot (\gamma(s_0 - \delta s) - \gamma(s_0))$$

og Taylors formel giver her, at

$$\gamma(s_0 - \delta s) = \gamma(s_0) - \gamma'(s_0)\delta s + \frac{\gamma''(s_0)}{2}(\delta s)^2 + \ldots.$$

Samme udregning som ovenfor viser da, at

$$0 = -(\varepsilon^{\delta s} - \gamma)\cdot\gamma'\delta s + \frac{1}{2}(\varepsilon^{\delta s}\cdot\gamma'' - \gamma\cdot\gamma'' - 1)(\delta s)^2$$

Ved at tage disse ligninger og henholdsvis lægge dem sammen og trække dem fra hinanden får vi efter division med δs og i grænsen $\delta s \to 0$, at $\varepsilon = \lim_{\delta s\to 0}\varepsilon^{\delta s}$ findes, og at

$$(\varepsilon - \gamma)\cdot\gamma' = 0, \quad (\varepsilon-\gamma)\cdot\gamma'' = 1.$$

Første ligning giver, at $\varepsilon - \gamma = k\cdot\mathbf{n}_s$ for en konstant s, så $\varepsilon = \gamma + k\cdot\mathbf{n}_s$. Ved at bruge, at $\gamma'' = \kappa_s\mathbf{n}_s$ giver anden ligning, at

$$1 = (\varepsilon - \gamma)\cdot\gamma'' = (k\mathbf{n}_s)\cdot\kappa_s\mathbf{n}_s = k\kappa_s,$$

så $k = 1/\kappa_s$ som ønsket. □

[P], Opgave 2.3.3. En regulær kurve γ i $\mathbb{R}^3$ med positiv krumning kaldes en *generaliseret helix*, hvis dens tangentvektor danner en fast vinkel θ med en fastholdt enhedsvektor $\mathbf{a}$. Vis at torsionen τ og krumningen κ af γ er relateret ved $\tau = \pm\kappa \cot\theta$. Vis omvendt at, hvis torsionen og krumningen er relateret ved $\tau = \lambda\kappa$ for en konstant λ, så er kurven en generaliseret helix. Vis direkte, at dette gælder helixen fra eksempel 2.3.2.

Bevis. Antag at γ er parametriseret ved buelængde, så $\mathbf{t} = \gamma'$. Vi ved så, at $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$. Derudover ved vi fra antagelsen, at $\mathbf{t} \cdot a = \cos(\theta)$. Idéen er igen nu den simple, at vi differentierer hver gang, vi ikke har andre oplagte muligheder. Ved at differentiere den sidste ligning, får vi

$$0 = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{a} = \kappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}.$$

Husk at $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ udgør en ortonormalbasis, så her står, at $\mathbf{a}$ tilhører $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$-planen, og dermed at

$$\mathbf{a} = \cos(\theta)\mathbf{t} \pm \sin(\theta)\mathbf{b}.$$

Ved at differentiere denne ligning og bruge Frenet-Serret-ligningerne (mere præcist definitionen (2.13) på τ) får vi

$$0 = \cos(\theta)\mathbf{t}' \pm \sin(\theta)\mathbf{b}' = \cos(\theta)\kappa\mathbf{n} \mp \sin(\theta)\tau\mathbf{n},$$

og da $\mathbf{n} \neq 0$, står her, at $0 = \cos(\theta)\kappa \pm \sin(\theta)\tau$, så

$$\tau = \pm\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\kappa = \pm\cot(\theta)\kappa.$$

Antag så, at $\tau = \lambda\kappa$ og vælg θ så $\cot(\theta) = \lambda$. Da er $\tau = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\kappa$, og ved at arbejde os tilbage med samme logik som ovenfor, får vi, at

$$0 = \cos(\theta)\mathbf{t}' + \sin(\theta)\mathbf{b}',$$

og vektoren

$$\mathbf{a} = \cos(\theta)\mathbf{t} + \sin(\theta)\mathbf{b}$$

virker til formålet: Den er konstant og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos(\theta)$ er konstant.

For den specifikke kurve

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$$

virker vektoren $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, da $\gamma' \cdot (0, 0, 1) = b$ er konstant. □

[P], Opgave 2.3.4. Lad γ være parametriseret ved buelængde, have positiv krumning og torsion forskellig fra 0 overalt. Vis at hvis γ ligger på overfladen af en sfære, da er

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right).$$

Vis omvendt at hvis ligningen er opfyldt, da er

$$\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2$$

for en positiv kosntant r med $\rho = 1/\kappa$ og $\sigma = 1/\tau$, og udled at γ ligger på en sfære med radius r. (Sidste del af opgaven er udeladt)

Bevis. Vi ved fra antagelsen, at der eksisterer $\mathbf{a}$, så $r^2 = \|\gamma - \mathbf{a}\|^2 = (\gamma - \mathbf{a}) \cdot (\gamma - \mathbf{a})$ er konstant. Som i de foregående opgaver er strategien at differentiere denne ligning, indtil vi er færdige.

Ved differentiation fås $0 = 2\mathbf{t} \cdot (\gamma - \mathbf{a})$ eller

$$0 = \mathbf{t} \cdot (\gamma - \mathbf{a}).$$

Ved at differentiere igen og indsætte Frenet-Serret-ligningerne, får vi

$$0 = \kappa\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) + \mathbf{t} \cdot \mathbf{t},$$

eller, idet $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$,

$$-\frac{1}{\kappa} = \mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}).$$

Ved at differentiere denne får vi

$$\frac{1}{\kappa^2}\kappa' = \mathbf{n}' \cdot (\gamma - \mathbf{a}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \cdot (\gamma - \mathbf{a}).$$

Ovenfor så vi, at $\mathbf{t} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = 0$, så ligningen bliver til

$$\mathbf{b} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}.$$

Differentierer vi denne, får vi

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right) = \mathbf{b}' \cdot (\gamma - \mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = -\tau\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = \frac{\tau}{\kappa},$$

hvor vi ved sidste lighed har indsat $\mathbf{n} \cdot (\gamma - \mathbf{a}) = -1/\kappa$, som vi fandt ovenfor.

Antag nu, at ligningen er opfyldt, og lad os vise at $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ er en konstant r^2. Vi skal med andre ord vise, at dens afledede er 0, altså at

$$0 = 2\rho\rho' + 2(\rho'\sigma)(\rho'\sigma)'. \tag{1}$$

For at vise dette, er det nok at vise, at

$$\rho = -\sigma(\rho'\sigma)', \tag{2}$$

for da bliver ligning (1) blot

$$-2\sigma(\rho'\sigma)'\rho' + 2(\rho'\sigma)(\rho'\sigma')' = 0.$$

I termer af κ og τ er (2) imidlertid blot vores antagelse.

For at se, at kurven lever på en kugle, sættes

$$\mathbf{a} = \gamma + \rho\mathbf{n} + \rho'\sigma\mathbf{b}.$$

Da følger af Pythagoras, at

$$\|\gamma - \mathbf{a}\|^2 = \|\rho\mathbf{n} + \rho'\sigma\mathbf{b}\|^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = r^2,$$

så vi er færdige, hvis vi kan vise, at $\mathbf{a}$ er konstant. Differentiation og brug af Frenet-Serret giver

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \mathbf{t} + \rho'\mathbf{n} + \rho(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (\rho'\sigma)'\mathbf{b} + \rho'\sigma(-\tau\mathbf{n}) \\ &= \mathbf{t} - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\mathbf{n} - \mathbf{t} - \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa} + \tau\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\mathbf{n}.\end{aligned}$$

At tjekke det for kurven $\gamma(t) = (\cos^2(t) - \frac{1}{2}, \cos(t)\sin(t), \sin(t))$ er mere end almindeligt vanskeligt, da kurven ikke er parametriseret ved buelængde. For at udregne κ og τ kan man bruge Proposition 2.1.2 og 2.3.1, og spørger man Mathematica, får man, at

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = -\frac{6\cos(t)(3 + \cos(2t))^{3/2}}{(13 + 3\cos(2t))^{3/2}},$$

som funktion af t og ikke buelængdeparameteren s, som højresiden i differentialligningen differentieres med hensyn til. $\square$