GEOMETRI-TØ, UGE 12

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1, [P] 6.3.2. Vis at Ennepers flade

$$\sigma(u,v) = \left(u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2\right),$$

hvor $u, v \in (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ er konformt parametriseret.

Bevis. Først og fremmest kan vi som altid få, at parametriseringen rent faktisk er en lokal parametrisering ved at vise de skridt, der nu skal vises (bemærk at σ ikke er injektiv på $\mathbb{R}^2$).

Ifølge kommentaren efter Korollar 6.3.4 er det nok at vise, at første fundamentalform er på formen $\lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$ for λ glat. Vi finder, at

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= (1 - u^2 + v^2, 2vu, 2u),\\
\sigma_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)\\
E &= (1 - 3u^2 + v^2)^2 + 4v^2u^2 + 4u^2 = 1 - 2u^2 + u^4 + 2v^2 - 2u^2v^2 + v^4 + 4v^2u^2 + 4u^2\\
&= 1 + 2u^2 + u^4 + 2v^2 + 2u^2v^2 + v^4,\\
F &= 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2vu - 2v^3u + 2vu^3 - 4uv = 0,\\
G &= 2u^2v^2 + (1 - v^2 + u^2)^2 + 4v^2 = 4u^2v^2 + 1 + 2u^2 + u^4 - 2v^2 - 2u^2v^2 + v^4 + 4v^2 = E,
\end{aligned}$$

som ønsket. □

Opvarmningsopgave 2, [P] 6.4.6. Bevis sætning 6.4.5: En lokal diffeomorfi $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ er ækviareal, hvis og kun hvis der for alle fladelapper σ på $\mathcal{S}_1$ og $f \circ \sigma$ på $\mathcal{S}_2$ gælder

$$E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2.$$

Bevis. Hvis ligningen holder, følger resultatet af definitionen på areal,

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \int_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv$$

da Proposition 6.4.2 fortæller os, at $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = E_1G_1 - F_1^2$. Hvis omvendt f er ækviareal, er

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \mathcal{A}_{f\circ\sigma}(f(R))$$

for alle R. Dermed kan vi konkludere, at

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \|(f\circ\sigma)_u \times (f\circ\sigma)_v\|,$$

for hvis de to er forskellige, er de forskellige i en lille omegn, vi dermed kan integrere over og få en modstrid med arealligheden. Dermed har vi, at $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$. □

Opvarmningsopgave 3, [P] 7.1.1. Udregn anden fundamentalform for den elliptiske paraboloide

$$\sigma(u,v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

Bevis. Vi regner og finder, at

$$\sigma_u = (1,0,2u), \quad \sigma_v = (0,1,2v), \quad \mathbf{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},$$
$$\sigma_{uu} = (0,0,2), \quad \sigma_{uv} = (0,0,0), \quad \sigma_{vv} = (0,0,2),$$
$$L = \sigma_{uu}\cdot\mathbf{N} = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, \quad M = \sigma_{uv}\cdot\mathbf{N} = 0, \quad N = \sigma_{vv}\cdot\mathbf{N} = L.$$

□

[P] 6.3.4. Lad $\Phi : U \to V$ være en diffeomorfi mellem åbne delmængder af $\mathbb{R}^2$ og skriv

$$\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v)),$$

hvor f og g er glatte funktioner i u-v-planen. Vis at Φ er konform, hvis og kun hvis, der enten gælder $f_u = g_v$, $f_v = -g_u$, eller $f_u = -g_v$ og $f_v = g_u$. Vis at $\det J\Phi > 0$ i første tilfælde og $\det J\Phi < 0$ i det andet.

Bevis. Følgende bevis er inspireret af, at ligningerne blot er Cauchy–Riemanns differentialligninger. Det første tilfælde svarer præcis til, at Φ er holomorf (og det andet til, at Φ er „anti-holmorf").

Ifølge Korollar 6.3.4 er Φ konform, hvis og kun hvis den første fundamentalform skalerer under anvendelse af Φ. Husk at første fundamentalform for planen er $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. De tilsvarende bliver under Φ til $E_\Phi = \langle (f_u, g_u), (f_u, g_u) \rangle = f_u^2 + g_u^2$, $F_\Phi = f_u g_u + f_v g_v$, $G_\Phi = f_v^2 + g_v^2$. Her står, at Φ er konform, hvis og kun hvis $f_u^2 + g_u^2 = f_v^2 + g_v^2$ og $f_u g_u + f_v g_v = 0$. Heraf følger, at hvis et af de to sæt ligninger er opfyldt, er Φ konform.

Betragt nu $z_u = f_u + ig_u$, $z_v = f_v + ig_v$. Udtrykt i termer af disse bliver ovenstående ligninger til $z_u\overline{z_u} = z_v\overline{z_v}$ og $z_u\overline{z_v} = -\overline{z_u}z_v$. Hvis $z_u \neq 0$ og $z_v \neq 0$, har vi $z_v\overline{z_v}/z_u = -z_u\overline{z_v}/z_v$, hvilket giver, at $z_u^2 = -z_v^2$. Det betyder, at $z_u = \pm i z_v$. Tilfældet $+$ giver, at $f_u + ig_u = if_v - g_v$ og tilfældet $-$, at $f_u + ig_u = -if_v + g_v$. Ved at tage real- hhv. imaginærdel i de to ligninger fås de to ønskede tilfælde. Hvis enten z_u eller z_v er 0, er den anden det også. Specielt er $f_u = f_v = g_u = g_u = 0$, og ligningerne er opfyldt.

Jacobianten af Φ er

$$\det J\Phi = \det \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = f_u g_v - f_v g_u.$$

I det første tilfælde står her $f_u^2 + g_u^2$ og i det andet tilfælde $-g_v^2 - f_v^2$. Resultatet følger. $\square$

Bevis #2. Her er et meget bedre bevis: Lad J være Jacobimatricen for Φ. Så har vi for to uger siden set, at

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J = J^t J,$$

hvis og kun hvis Φ er konform, idet vi i første lighed som ovenfor bruger, at dette er ækvivalent med, at første fundamentalform skalerer ved brug af Φ. Her står, at $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} J$ er en ortogonalmatrix. Hvis $\det J > 0$, betyder det, at der findes et θ, så

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}.$$

Påstanden i opgaven følger direkte. I tilfældet $\det J < 0$, findes θ så

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix},$$

som igen giver det ønskede. $\square$

[P] 5.1.1 (i). Vis at $x^2 + y^2 + z^4 = 1$ er en glat flade.

Bevis. Mængden er nulpunktsmængden for funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 - 1.$$

Gradienten af denne funktion er

$$\nabla f = (2x, 2y, 4z^3),$$

som ses kun at være nul, hvis $(x,y,z) = 0$. Specielt er dette aldrig tilfældet på fladen selv, og den er glat if. Sætning 5.1.1. $\square$

[P] 7.2.1. Udregn Gaussafbildningen $\mathcal{G}$ af paraboloiden $\mathcal{S}$ givet ved $z = x^2 + y^2$. Hvad er billedet af $\mathcal{G}$?

Bevis. Denne opgave har vi allerede løst som del af ugeseddelopgave 2 på ugeseddel 10. Her fandt vi, at

$$\mathcal{G}(u,v) = \mathbf{N}_\sigma(u,v) = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},$$

og at billedet af $\mathcal{G}$ præcis er den åbne øvre halvdel af sfæren. □

[P] 7.1.4. Hvordan ændrer anden fundamentalform sig ved en isometri af $\mathbb{R}^3$? Eller en dilation?

Bevis. Betragt $\tilde{\sigma} = R\sigma + \mathbf{a}$. Som tidligere finder vi, at

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_u = R\sigma_u, \quad \tilde{\sigma}_v = R\sigma_v, \\ \tilde{\sigma}_{uu} = R\sigma_{uu}, \quad \tilde{\sigma}_{uv} = R\sigma_{uv}, \quad \tilde{\sigma}_{vv} = R\sigma_{vv}, \\ \tilde{\mathbf{N}} = \pm R\mathbf{N},\end{gathered}$$

hvor fortegnet er $\det(R)$. Det følger, at $\tilde{L} = \pm L$, $\tilde{M} = \pm M$, $\tilde{N} = \pm N$.

Antag nu, at $\tilde{\sigma} = a\sigma$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da vil alle afledte også blot skaleres med faktoren a, mens $\mathbf{N}$ forbliver uændret. Altså vil alle koefficienterne i anden fundamentalform også skalere med en faktor a. □

[P] 7.1.3. Lad $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})$ være en reparametrisering af $\sigma(u,v)$ med $(u,v) = \Phi(\tilde{u},\tilde{v})$. Bevis, at

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \pm J^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J,$$

hvor J er Jacobimatricen for Φ, og fortegnet afhænger af fortegnet af $\det(J)$. Udled af den tilsvarende opgave om første fundamentalformer, at anden fundamentalform er uændret under en orienteringsbevarende reparametrisering.

Bevis. Lad os bare tjekke resultatet for L. Husk at vi sidste gang så, at

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = D\sigma \circ J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_v, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

Ved at differentiere disse produkter mht. $\tilde{u}$ får vi, at

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{u}\tilde{u}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_u + \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}}\sigma_v \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_u + \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial u}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial v}\sigma_u\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial u}\sigma_v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial}{\partial v}\sigma_v\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_u + \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2}\sigma_v + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 \sigma_{uu} + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)^2 \sigma_{vv} + 2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_{uv}.\end{aligned}$$

Fra formlen nederst side 84 får vi, at

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\det J}{|\det J|}\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \operatorname{sign}(\det J)\mathbf{N}.$$

Specielt ved vi hermed, at $\langle \sigma_u, \tilde{\mathbf{N}} \rangle = \langle \sigma_v, \tilde{\mathbf{N}} \rangle = 0$. Heraf kan vi konkludere, at

$$\begin{aligned}\tilde{L} = \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{N}} \rangle &= \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 \langle \sigma_{uu}, \tilde{\mathbf{N}} \rangle + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)^2 \langle \sigma_{vv}, \tilde{\mathbf{N}} \rangle + 2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\langle \sigma_{uv}, \tilde{\mathbf{N}} \rangle \\ &= \operatorname{sign}(\det J)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 L + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)^2 N + 2\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}M\right).\end{aligned}$$

Lignende formler kan findes for $\tilde{M}$ og $\tilde{N}$ og ved indsættelse ser man, at matrixligningen stemmer.

For at se sidste påstand i opgaven, oversætter vi først problemet til lineær algebra. Hvis b er en basis for T_pS med tilhørende koefficienter til anden fundamentalform L_b, M_b, N_b, og $v = (v_1, v_2)_b$ er $w = (w_1, w_2)_b$ er elementer i T_pS opskrevet i basen b, så er

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} L_b & M_b \\ M_b & N_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Lad i forbindelse med vores opgave $\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (og tilsvarende for w) være koefficienterne for en vektor i hver af de to baser, relateret ved basisskiftmatricen J. Da er

$$\begin{aligned}\widetilde{\langle\langle v, w\rangle\rangle} &= \left[J^{-1}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]^t \left[J^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J\right] \left[J^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \langle\langle v, w\rangle\rangle.\end{aligned}$$

□

[P] 5.6.2. Bevis sætning 1.5.1 og dens analog for niveaukurver i $\mathbb{R}^3$ (opgave 1.5.2). Denne siger følgende: Lad $f(x, y)$ være en glat funktion. Antag at for ethvert punkt på niveaukurven

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

gælder, at ikke både $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ er 0. Hvis $p = (x_0, y_0)$ er et punkt på $\mathcal{C}$ med koordinater, da findes en regulær parametriseret kurve $\gamma(t)$ defineret på en åben omegn af 0, så $\gamma(0) = p$, og $\gamma(t) \in \mathcal{C}$ for alle t.

Opgave 1.5.2 siger følgende: Find på et lignende udsagn for niveaukurver i $\mathbb{R}^3$ givet ved $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$.

Bevis. Vi følger idéen fra beviset for sætning 5.1.1, der står på side 118. Lad os antage, at $\partial f/\partial y \neq 0$ i p (det andet tilfælde er analogt) og definer afbildningen $F : W \to \mathbb{R}^2$ ved $F(x, y) = (x, f(x, y))$, hvor W er definitionsområdet for f. Da er F glat og har Jacobimatrix

$$JF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x & f_y \end{pmatrix},$$

som er invertibel i p, da vi havde antaget, at $f_y \neq 0$. Da findes if. invers funktion-sætningen en åben omegn V i $\mathbb{R}^2$ omkring $F(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$ og en glat afbildning $G : V \to W$, så $\tilde{W} = G(V)$ er åben og $F : \tilde{W} \to V$ og $G : V \to \tilde{W}$ er hinandens inverse. Da V er åben findes et åbne intervaller I_1 og I_2, så $x_0 \in I_1$, $0 \in I_2$ og $I_1 \times I_2 \subseteq V$, og vi kan lige så godt antage, at $V = I_1 \times I_2$. Der findes nu en glat afbildning $g : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, så

$$G(x, w) = (x, g(x, w)),$$

og pr. konstruktion gælder

$$(x, w) = F(G(x, w)) = F(x, g(x, w)) = (x, f(x, g(x, w))),$$

så specielt er $f(x, g(x, w)) = w$ for alle $x \in I_1, w \in I_2$. Definer nu $\gamma : I_1 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\gamma(x) = (x, g(x, 0)) = G(x, 0).$$

Da er $\gamma(x) \in \tilde{W}$ og

$$f(\gamma(x)) = f(G(x, 0)) = f(x, g(x, 0)) = 0,$$

så $\gamma(x) \in \mathcal{C}$ og

$$\gamma(x_0) = G(x_0, 0) = F^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0)$$

Det er klart, at γ er glat, den er injektiv med invers $(x, y) \mapsto x$, og den er regulær, da

$$\gamma'(x) = (1, g_x(x, 0))$$

aldrig er 0. Egentlig kræver opgaven, at $\gamma(0) = p$, hvilket vi kan opnå ved i stedet at betragte $I = I_1 - x_0$ og definere $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + x_0)$ på I.

Påstanden for det 3-dimensionale tilfælde bliver følgende: Lad

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

og lad $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$. Antag at matricen

$$\begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix}$$

er invertibel (lignende udsagn kunne konstrueres for (x, y) og (x, z)). Da findes en åben omegn I omkring x_0 og en regulær kurve $\gamma : I \to \mathcal{C}$, så $\gamma(x_0) = p$.

Antag, at f og g begge er defineret på en åben mængde W og definer funktionen $F : W \to \mathbb{R}^3$ ved $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z), g(x, y, z))$. Vores antagelse er sat op, så Jacobimatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$$

er invertibel. Invers funktion-sætningen giver os da en invers $G : V \to \tilde{W}$ til F. Lad g_1 og g_2 være de glatte funktioner, så

$$G(x, y, z) = (x, g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)).$$

Nu gælder

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= F(G(x, y, z)) = F(x, g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) \\ &= (x, f(x, g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)), g(x, g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))). \end{aligned} \tag{1}$$

Definer kurven γ på et passende interval om x_0 ved

$$\gamma(x) = (x, g_1(x, 0, 0), g_2(x, 0, 0)) = G(x, 0, 0).$$

Fra (1) får vi nu, at

$$(x, f \circ \gamma(x), g \circ \gamma(x)) = (x, 0, 0),$$

så $\gamma(x) \in \mathcal{C}$ for alle x. Da $F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, 0, 0)$ får vi endelig, at

$$\gamma(x_0) = G(x_0, 0, 0) = F^{-1}(x_0, 0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$$

som ønsket. Bemærk endelig, at γ er regulær pr. konstruktion. $\square$