GEOMETRI-TØ, UGE 11

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1, [P] 5.2.1. Find parametriseringer af de kvadratiske flader i delene (i)–(xi) i Sætning 5.2.2 (fjern origo fra (vi)).

Løsning. Lad os betragte dem fra en ende.

(i) Kan ses at være diffeomorf med sfæren, og man kan få en lokal parametrisering derfra (eller lave den fra bunden – f.eks. ved en variation af sfæriske koordinater, ved at dække den med 6 symmetrisk konstruerede kort eller en pendant til stereografisk projektion).
(ii) Denne er en omdrejningsflade.
(iii) Lav et atlas bestående af to grafparametriseringer.
(iv) Denne er en graf.
(v) Også en graf.
(vi) Som i (iii): Betragt fladen som en forening af to grafer af funktioner defineret på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(vii) Omdrejningsflade (homøomorf med en cylinder).
(viii) Forening af to grafer (set som en funktion af enten (x,z) eller (y,z), som ikke afhænger af z).
(ix) Som (viii) men med blot en enkelt parametrisering.
(x) $\sigma(u,v) = (0,u,v)$.
(xi) $\sigma_\pm(u,v) = (\pm\sqrt{p}, u, v)$.

■

Opvarmningsopgave 2, [P] 6.1.1 (i,ii,iv). Udregn første fundamentalform af følgende flader

$$\begin{aligned}
\sigma(u,v) &= (\sinh u \sinh v, \sinh u \cosh v, \sinh u),\\
\sigma(u,v) &= (u-v, u+v, u^2+v^2),\\
\sigma(u,v) &= (u, v, u^2+v^2).
\end{aligned}$$

Hvilke typer flader er disse?

Løsning. For den første er

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= (\cosh u \sinh v, \cosh u \cosh v, \cosh u),\\
\sigma_v &= (\sinh u \cosh v, \sinh u \sinh v, 0).
\end{aligned}$$

Det følger, at

$$\begin{aligned}
E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle &= \cosh^2 u \sinh^2 v + \cosh^2 u \cosh^2 v + \cosh^2 u\\
&= \cosh^2 u(\sinh^2 v + \cosh^2 v + 1) = \cosh^2 u(\cosh^2 v + \cosh^2 v) = 2\cosh^2 u \cosh^2 v,\\
F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle &= 2\cosh u \sinh u \cosh v \sinh v = \tfrac{1}{2}\sinh(2u)\sinh(2v),\\
G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle &= \sinh^2(u)(\cosh^2 v + \sinh^2 v) = \sinh^2(u)\cosh(2v).
\end{aligned}$$

Bemærk, at koordinaterne opfylder $x^2 + z^2 = y^2$. Denne flade er den kvadratiske kegle beskrevet på side 99.

For den anden finder vi

$$\sigma_u = (1,1,2u), \quad \sigma_v = (-1,1,2v),$$
$$E = 4u^2 + 2, \quad F = 4uv, \quad G = 4v^2 + 2.$$

Definer reparametriseringen $\Phi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, -u+v)$. Vi finder, at

$$\sigma \circ \Phi(u,v) = (u, v, \tfrac{1}{4}(u^2 + v^2 + 2uv + u^2 + v^2 - 2uv)) = (u, v, \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)),$$

som er noget, der ligner paraboloiden.

Endelig gælder for den sidste, at

$$\sigma_u = (1, 0, 2u), \quad \sigma_v = (0, 1, 2v),$$
$$E = 4u^2 + 1, \quad F = 4uv, \quad G = 4v^2 + 1.$$

Fladen her er paraboloiden. $\square$

Opvarmningsopgave 3, [P] 6.1.3. Lad $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ være første fundamentalform for en fladelap $\sigma(u,v)$ for en flade $\mathcal{S}$. Vis at hvis p er et punkt i billedet af σ, og $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$, så er

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = Edu(\mathbf{v})du(\mathbf{w}) + F(du(\mathbf{v})dv(\mathbf{w}) + du(\mathbf{w})dv(\mathbf{v})) + Gdv(\mathbf{v})dv(\mathbf{w}).$$

Bevis. Skriv $\mathbf{v} = du(\mathbf{v})\sigma_u + dv(\mathbf{v})\sigma_v$ og $\mathbf{w} = du(\mathbf{w})\sigma_u + dv(\mathbf{w})\sigma_v$. Resultatet følger umiddelbart. $\square$

[P] 6.1.1 (iii). Find første fundamentalform for $\sigma(u,v) = (\cosh u, \sinh u, v)$ og beskriv fladen.

Bevis. Vi finder, at

$$\sigma_u = (\sinh u, \cosh u, 0), \quad \sigma_v = (0, 0, 1),$$
$$E = \sinh^2 u + \cosh^2 u = \cosh(2u), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Bemærk at koordinaterne i denne opfylde $x^2 - y^2 = 1$. En flade med den egenskab kaldes en hyperbolsk cylinder og ses på side 100. $\square$

[P] 6.1.4. Lad $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})$ og være en reparametrisering af $\sigma(u,v)$, og lad

$$\tilde{E}d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + \tilde{G}d\tilde{v}^2, \quad Edu^2 + 2Fdudv + Gdudv$$

være deres første fundamentalformer. Vis at

$$du = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}d\tilde{v}, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}d\tilde{u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}d\tilde{v}.$$

Vis at hvis $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$ er Jacobimatricen af reparametriseringen $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v)$, så er

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J.$$

Bevis. Lad $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$ være reparametriseringsafbildningen, så $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$. Da er

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} & \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = D\tilde{\sigma}_{(\tilde{u},\tilde{v})} = D\sigma_{(u,v)} D\Phi_{(\tilde{u},\tilde{v})} = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

Læses ligningen søjlevist, fås

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_v,$$
$$\tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\sigma_v$$

Det følger, at

$$du(\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}) = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}d\tilde{v} \right)(\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}),$$
$$du(\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}) = \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}d\tilde{v} \right)(\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}).$$

Da $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ udgør en basis, kan vi konkludere, at

$$du = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}d\tilde{v}$$

som ønsket. Tilsvarende vises identiteten for dv.

Hvad angår første fundamentalform finder vi, at

$$\tilde{E} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_v, \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\sigma_v \right\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 E + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right) F + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)^2 G,$$

og tilsvarende formler for $\tilde{F}$ og $\tilde{G}$. Matrixligningen følger ved indsættelse. □

[P] 6.2.1. Skriv en isometri fra den cirkulære kegle (fraregnet en linje) $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, til en åben delmængde af x-y-planen.

Løsning. Definer afbildningen ved $f(u\cos v, u\sin v, u) = (\sqrt{2}u\cos\frac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}u\cos\frac{v}{\sqrt{2}}, 0)$. At denne afbildning er en lokal diffeomorfi er intet under, så lad os vise, at den er en isometri. Ifølge Korollar 6.2.3 er det tilstrækkeligt at tjekke, at σ og $f\circ\sigma$ har samme første fundamentalform, for f kan let ses at være en diffeomorfi, da afbildningen

$$(u,v) \mapsto (\sqrt{2}u\cos\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}u\cos\tfrac{v}{\sqrt{2}})$$

er det.

For σ finder vi

$$\sigma_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad \sigma_v = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$
$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = u^2.$$

For $f\circ\sigma$ finder vi

$$(f\circ\sigma)_u = (\sqrt{2}\cos\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\sin\tfrac{v}{\sqrt{2}}, 0), \quad (f\circ\sigma)_v = (-u\sin\tfrac{v}{\sqrt{2}}, u\cos\tfrac{v}{\sqrt{2}}, 0),$$
$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

så det stemmer. ■

[P] 6.2.2. Er afbildningen fra den cirkulære halvkegle $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ til x-y-planen, givet ved $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ en isometri?

Svar. At dømme på sidste opgave er den nok ikke. Linjestykket fra $(1,1,2)$ til $(2,2,8)$ i halvkeglen har længde $\sqrt{38}$ men sendes i linjestykket fra $(1,1)$ til $(2,2)$ som har længde $\sqrt{2} \neq \sqrt{38}$. En anden måde at vise det på ville være at observere, at projektionen ikke bevarer første fundamentalform. ■

Ugeseddelopgave 2. Betragt $S = \{(\cos u, \sin(2u), v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$. Bestem T_0S og brug resultatet til at vise, at S ikke er en regulær flade.

Bevis. Lad os for modstrid finde 3 kurver i S, der går gennem 0 og hvis tangenter er lineært uafhængige. Sæt

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = (\cos t, \sin(2t), 0),$$
$$\gamma_3(t) = (0,0,t),$$

hvor γ_1 er defineret på $(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, γ_2 er defineret på $(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2}\varepsilon)$, og γ_3 er defineret på $(-1,1)$. Bemærk først, at $\gamma_1(\frac{\pi}{2}) = \gamma_2(\frac{3\pi}{2}) = \gamma_3(0) = (0,0,0)$. Deres tangenter er i punktet givet ved

$$\gamma_1'(\tfrac{\pi}{2}) = (-\sin\tfrac{\pi}{2}, 2\cos\pi, 0) = (-1,-2,0),$$
$$\gamma_2'(\tfrac{3\pi}{2}) = (-\sin\tfrac{3\pi}{2}, 2\cos(3\pi), 0) = (1,-2,0),$$
$$\gamma_3'(0) = (0,0,1),$$

der ses at være lineært uafhængige. □

Ugeseddelopgave 3. For $\lambda \neq 0$ er vindelfladen

$$S = \{(v\cos u, v\sin u, \lambda u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Bekræft at S er en regulær flade og vis at projektionsafbildningen $\pi : \sigma(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ givet ved $\pi(x,y,z) = (x,y,0)$ er en lokal diffeomorfi af flader. Er π en diffeomorfi?

Bevis. Lad $\sigma : \mathbb{R}^2 \to S$ være $\sigma(u,v) = (v\cos u, v\sin u, \lambda u)$. Hvis $\sigma(u_1,v_1) = \sigma(u_2,v_2)$, giver tredjekoordinaten, at $u_1 = u_2$. Da enten $\cos(u_1)$ eller $\sin(u_1)$ er forskellig fra 0, giver den ene af de to første koordinater, at $v_1 = v_2$, så σ er injektiv. Lad $(x,y,z) = \sigma(u,v)$ ligge på fladen. Idet vi bemærker, at x^2+y^2 er konstant lig v^2 på fladen, lader vi $v = \sqrt{x^2+y^2}$ og $u = \frac{z}{\lambda}$. Da er $\sigma(u,v) = (x,y,z)$, og det er klart, at både u og v er kontinuerte i (x,y,z). Endelig er

$$\sigma_u = (-v\sin u, v\cos u, \lambda), \quad \sigma_v = (\cos u, \sin u, 0),$$

som er lineært uafhængige.

Lad os vise, at π er en lokal diffeomorfi for $v \neq 0$, så lad $\sigma(u_0,v_0) \in S$, $v_0 \neq 0$. Bemærk, at $\pi \circ \sigma(\cdot, v)$ er parametriseringen af et stykke af en cirkel med radius $|v|$. Hvis $v_0 > 0$ får vi derfor, at $\pi|_{\sigma((u_0-\pi,u_0+\pi)\times(v_0/2,2v_0))}$ er injektiv. Tilsvarende gælder for $v_0 < 0$, at $\pi|_{\sigma((u_0-\pi,u_0+\pi)\times(2v_0,v_0/2))}$ er injektiv.

Endelig kan vi observere, at π i hvert fald ikke er en diffeomorfi, da den ikke er injektiv. $\square$

[P], 6.1.5. Vis at de følgende er ækvivalente:

(1) $E_v = G_u = 0$.
(2) σ_{uv} er parallel med enhedsnormalen $\mathbf{N}$.
(3) De modstående sider i en firkant af parameterkurverne fra σ har samme længde.

Vis også, at hvis disse betingelser er opfyldt, så har σ en reparametrisering $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})$ med første fundamentalform

$$d\tilde{u}^2 + 2\cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2,$$

hvor θ er en glat funktion af $(\tilde{u},\tilde{v})$. Vis at θ er vinklen mellem parameterkurverne i $\tilde{\sigma}$. Vis ydermere at hvis $\hat{u} = \tilde{u}+\tilde{v}$, $\hat{v} = \tilde{u}-\tilde{v}$, så har den resulterende reparametrisering $\hat{\sigma}(\hat{u},\hat{v})$ første fundamentalform

$$\cos^2\omega d\hat{u}^2 + \sin^2\omega d\hat{v}^2,$$

hvor $\omega = \theta/2$.

Bevis. Lad os første vise, at de to første betingelser er ækvivalente. Vi har, at

$$E_v = (\langle\sigma_u,\sigma_u\rangle)_v = 2\langle\sigma_{uv},\sigma_v\rangle,$$
$$G_u = (\langle\sigma_v,\sigma_v\rangle)_u = 2\langle\sigma_{vu},\sigma_u\rangle.$$

Her står, at hvis $E_v = G_u = 0$, så er σ_{uv} vinkelret på $\text{span}(\sigma_u,\sigma_v)$ og derfor parallel med $\mathbf{N}$. Omvendt står her også, at hvis σ_{uv} er parallel med $\mathbf{N}$, så er $E_v = G_u = 0$.

Lad os nu vise, at betingelse (1) og (3) er ækvivalente. Lad os antage at firkanten i opgaven har hjørner med i billedet af de fire punkter $(u_0,v_0),(u_0,v_1),(u_1,v_0)$ og (u_1,v_1). Antag først, at $E_v = G_u = 0$ og betragt kurven $\gamma(t) = \sigma(u(t),v(t))$. Antag først, at $v(t) = v_0$ er konstant og at $u(t) = t$, så γ er parameterkurven fra (u_0,v_0) til (u_1,v_0). Længden af γ fra t_0 til t_1 (tegning) er if. formel (6.1) givet ved

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(t,v_0)u'(t)^2 + 2F(t,v_0)u'(t)v'(t) + G(t,v_0)v'(t)^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(t,v_0)}\,dt.$$

Da E udelukkende afhænger af u (idet vi har antaget $E_v = 0$), er dette integral også lig

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(t,v_1)}\,dt,$$

som præcis er længden af parameterkurven fra (u_0,v_1) til (u_1,v_1). Helt tilsvarende vises, at kurverne fra (u_0,v_0) til (u_0,v_1) og (u_1,v_0) til (u_1,v_1) har samme længde.

Antag omvendt, at de relevante sider i firkanten har samme længde. Det betyder så pr. samme argument, at $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E(t,v)}\,dt$ ikke afhænger af v. Det vil sige, at

$$0\frac{d}{dv}\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(t,v)}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{E_v}{2\sqrt{E}}\,dt.$$

Da dette gælder for alle t_0, t_1, betyder det, at $\frac{E_v}{2\sqrt{E}} = 0$, så $E_v = 0$. På samme måde kan det vises, at $G_u = 0$.

Lad os nu betragte sidste del af opgaven. Sæt $\tilde{u} = \int_{u_0}^{u} \sqrt{E(u)}\, du$ og $\tilde{v} = \int_{v_0}^{v} \sqrt{G(v)}\, dv$. Da er reparametriseringsafbildningen $\Phi(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$ en diffeomorfi, da dens jacobiant er

$$\det D\Phi_{(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{G} \end{pmatrix} = \sqrt{EG} \neq 0. \tag{1}$$

Pr. kædereglen er

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}$$

Vi ved allerede fra udregningen i (1), at de blandede led forsvinder, og det følger, at

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right)^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)^2 E = 1, \\ \tilde{F} &= \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle = E \frac{du}{d\tilde{u}} \frac{du}{d\tilde{v}} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\right) + G \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}, \\ &= F \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \\ \tilde{G} &= \langle \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle = \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = 1. \end{aligned}$$

Bemærk, at vi fra Cauchy–Schwarz har $F^2 < EG$, så $-1 < \frac{F}{\sqrt{EG}} < 1$, og vi kan vælge θ glat, så $\cos(\theta) = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Med dette valg bliver første fundamentalform på den ønskede form, og θ får ydermere den rigtige fortolkning, da vinklen mellem parameterkurverne generelt er

$$\frac{\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \rangle}\sqrt{\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle}} = \frac{\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}} = \cos\theta.$$

Lad os nu betragte sidste del af opgaven og lad os bare udregne $\hat{E}$. De øvrige koefficienter kan findes på lignende vis. Bemærk først, at $\tilde{u} = \frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v})$, $\tilde{v} = \frac{1}{2}(\hat{u} - \hat{v})$. Vi finder, at

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \hat{u}} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{u}} \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \hat{u}} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{u}} \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle \\ &= \frac{1}{4}\tilde{E} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\tilde{F} + \frac{1}{4}\tilde{G} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

$\square$