# GEOMETRI-TØ, UGE 10

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

**Opvarmningsopgave 1.** Betragt fladen $S = \{(x, y, z) \mid z = xy\}$. Bestem en basis for $T_pS$ og beregn en enhedsnormalvektor $N$ i hvert $p \in S$.

*Løsning.* Vi ved fra sidste uge, at $\sigma : \mathbb{R}^2 \to S$ givet ved $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$ er en parametrisering af $S$. I punktet $p = \sigma(u, v) \in U$ finder vi, at

$$\sigma_u = (1, 0, v), \quad \sigma_v = (0, 1, u).$$

Vi ved desuden fra sidst, at disse to vektorer udgør basis for $T_pS$. En normalvektor er da givet ved

$$N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(-v, -u, 1)}{\sqrt{v^2 + u^2 + 1}}.$$

■

**Opvarmningsopgave 2.** Antag at $t \mapsto (u(t), v(t)) \in U$ er en regulær plan kurve og at $\sigma : U \to S$ er en regulær lokal parametrisering af en flade $S$. Vis at $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ er en regulær kurve på $S$.

*Bevis.* Vi finder, at

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \frac{d}{dt}\sigma(u(t), v(t)) = D\sigma_{(u(t),v(t))}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_u(u(t), v(t)) & \sigma_v(u(t), v(t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = u'(t_0)\sigma_u + v'(t_0)\sigma_v.\end{aligned}$$

Da $t \mapsto (u(t), v(t))$ er regulær, er $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ aldrig 0. Da vores lokale parametrisering er regulær er $\sigma_u$ og $\sigma_v$ lineært uafhængige, så nulrummet for matricen bestående af disse to som søjler vil være trivielt, og specielt er $\gamma'(t) \neq 0$. □

**Opvarmningsopgave 3, [P] 5.4.1.** En af flader $x^2 - y^2 + z^4 = 1$ og $x^2 + y^2 + z^4 = 1$ er kompakt, og den anden er ikke; find den kompakte og skitser den.

*Bevis.* Vi påstår, at den første flade ikke er kompakt; for alle $a \in \mathbb{R}$ indeholder den punktet $(a, a, 1)$. Den er dermed ikke begrænset og kan umuligt være kompakt. Den anden flade er kompakt: Den er begrænset, da den er indeholdt i $[-1, 1]^3$, og den er lukket, da den er urbilledet af den lukkede mængde $\{1\}$ under den kontinuerte afbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ givet ved $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^4$.

Se Figur 1 for en skitse af figuren; for hver fast $z$-værdi mellem $-1$ og 1 består den af en cirkel med radius $\sqrt{1 - z^4}$. □

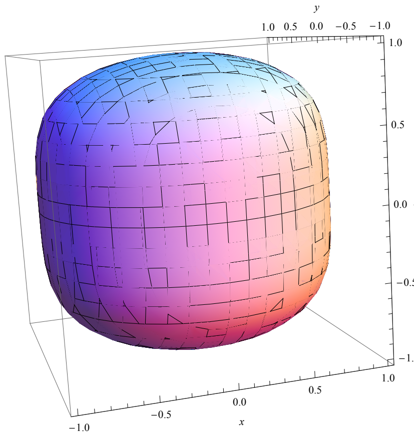
**[P] 4.5.1.** Beregn transitionsafbildningen $\Phi$ mellem de to fladelapper for Möbiusbåndet i Eksempel 4.5.3. Vis at den er defineret på foreningen af to disjunkte rektangler i $\mathbb{R}^2$, og at determinanten af Jacobimatricen er 1 på det ene rektangel og $-1$ på den anden.

*Bevis.* Definer

$$\sigma_i(t, \theta) = \left(\left(1 - t\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 - t\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

$i = 1, 2$, på de åbne mængder

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2,\ 0 < \theta < 2\pi\},\\ U_2 &= \{(t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2,\ -\pi < \theta < \pi\}.\end{aligned}$$




FIGUR 1. Fladen $x^2 + y^4 + z^4 = 1$

.

Vi finder da, at $\Phi = (\sigma_2)^{-1}\sigma_1$ er defineret på mængden

$$\sigma_1^{-1}(\sigma_2(U)) = \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2,\ 0 < \theta < 2\pi\,\theta \neq \pi\} \subseteq U_1,$$

der er en forening af de åbne rektangler,

$$R_1 = \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2,\ 0 < \theta < \pi\}$$
$$R_2 = \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < t < 1/2,\ \pi < \theta < 2\pi\}.$$

På $R_1$ er $\sigma_1(t,\theta) = \sigma_2(t,\theta)$ og

$$\Phi(t,\theta) = (t,\theta),$$

hvis jacobiant er 1. Betragt $(t,\theta) \in R_2$ og lad $(\tilde{t},\tilde{\theta}) = \Phi(t,\theta)$. Vi har, at $\tilde{\theta} = \theta - 2\pi$. Da $\sigma_2(\tilde{t},\tilde{\theta}) = \sigma_1(t,\theta)$ og $\cos(\tilde{\theta}/2) = -\cos(\theta/2)$ følger, at $\tilde{t} = -t$, så vi får alt i alt, at

$$J\Phi_{(t,\theta)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

der har determinant $-1$. □

**Ugeseddelopgave 2.** Betragt fladen $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ med lokal parametrisering $\sigma(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$. Bestem standardnormalen $N_\sigma$ for hvert punkt i fladen. Betragt $N_\sigma$ som en afbildning $S \to S^2$. Bestem dens billede og beregn differentialet $D_0N_\sigma$ af $N_\sigma$ i 0.

*Løsning.* Vi har, at $\sigma_u = (1,0,2u)$, $\sigma_v = (0,1,2v)$, så

$$N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.$$

Vi påstår, at billedet af $N_\sigma : S \to S^2$ er $S^2 \cap \{z > 0\}$. Lad $(x,y,z) \in S^2$, $z > 0$, så $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Sæt $u = -\frac{x}{2z}$, $v = -\frac{y}{2z}$. Så er

$$\sqrt{4u^2+4v^2+1} = \sqrt{x^2/z^2 + y^2/z^2 + 1} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{z}$$

og dermed får vi, at

$$N_\sigma(u,v) = z\,(x/z, y/z, 1) = (x,y,z).$$

Bemærk omvendt, at tredje koordinat af $N_\sigma$ altid er positiv, og billedet er det ønskede. Lad os endelig finde differentialet $D_0N_\sigma : T_0S \to T_{(0,0,1)}S^2$. Definer to kurver $\gamma_1, \gamma_2 : (-1,1) \to S$ ved

$\gamma_1(t) = \sigma(t,0)$ og $\gamma_2(t) = \sigma(0,t)$, så $\gamma_1'(0) = \sigma_u(0,0)$, $\gamma_2'(0) = \sigma_v(0,0)$. Da finder vi, at

$$D_0N_\sigma(\sigma_u) = (N_\sigma \circ \gamma_1)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{(-2t,0,1)}{\sqrt{4t^2+1}} = (-2,0,0),$$
$$D_0N_\sigma(\sigma_v) = (N_\sigma \circ \gamma_2)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{(0,-2t,1)}{\sqrt{4t^2+1}} = (0,-2,0).$$

■

**Ugeseddelopgave 3.** Lad $S$ være en regulær flade og lad $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være en glat funktion. Sæt $\nabla_{p,S}F = \pi_{p,S}(\nabla F) = \pi_{p,S}(F_x, F_y, F_z)$, hvor $\pi_{p,S}$ er ortogonalprojektionen på $T_pS$. Vis at der for alle glatte kurver med $\gamma$ på $S$ med $\gamma(t_0) = p$ gælder, at

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)|_{t_0} = (\nabla_{p,S}F) \cdot (\dot\gamma(t_0)).$$

Konkluder at hvis $p$ er et maksimumspunkt for $F$, så er $\nabla_{p,S}F = 0$. Brug dette resultat til at finde alle punkter $(x,y,z) \in S^2$, hvor $F(x,y,z) = xyz$ antager sit maksimum.

*Bevis.* Lad $\sigma$ være en lokal parametrisering der rammer $p$, og antag uden tab af generalitet at $\sigma_u$ og $\sigma_v$ er ortogonale. Da er

$$\pi_{p,S}(\nabla F) = \frac{\nabla F \cdot \sigma_u}{\|\sigma_u\|^2}\sigma_u + \frac{\nabla F \cdot \sigma_v}{\|\sigma_v\|^2}\sigma_v.$$

Tilstrækkeligt tæt på $t_0$ kan vi skrive $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, så kædereglen giver os $\gamma'(t) = u'(t)\sigma_u + v'(t)\sigma_v$, og højresiden af opgaven bliver

$$(\nabla_{p,S}F) \cdot (\dot\gamma(t_0)) = u'(t_0)\nabla F \cdot \sigma_u + v'(t_0)\nabla F \cdot \sigma_v.$$

Kædereglen giver for venstresiden, at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(F \circ \gamma) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(F \circ \sigma(u(t), v(t))) \\ &= DF_{\sigma(u(t),v(t))}D\sigma_{(u(t),v(t))}\begin{pmatrix}u'(t_0)\\ v'(t_0)\end{pmatrix} \\ &= \nabla F \cdot (\sigma_u u'(t_0) + \sigma_v v'(t_0)),\end{aligned}$$

som ønsket.

Det følgende er nok i virkeligheden en meget lettere løsning, der slipper uden om antagelse på $\sigma_u$ og $\sigma_v$: Lad $N$ betegne en normalvektor til $S$ i $p$. Vi ved at $\nabla_{p,S}F = \nabla F - tN$, hvor $t$ løser $(\nabla F - tN) \cdot N$. Eksplicit gælder, at $t = \nabla F \cdot N$. Vi ved fra kædereglen, at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(F \circ \gamma) &= \nabla F \cdot \dot\gamma(t_0) = \nabla F \cdot \dot\gamma(t_0) - tN \cdot \dot\gamma(t_0) \\ &= \nabla_{p,S}F \cdot \dot\gamma(t_0).\end{aligned}$$

Antag nu at $p$ er et maksimumspunkt for $F$ og lad $\gamma_1, \gamma_2$ være kurver med $\gamma_i(t_0) = p$, så $\gamma_i'(t_0)$ udspænder $T_pS$. Antagelsen giver, at $F \circ \gamma$ har et maksimum i $t_0$, og det følger af første del af opgaven, at $\nabla_{p,S}F$ står vinkelret på både $\gamma_1'(t_0)$ og $\gamma_2'(t_0)$. Da $\nabla_{p,S}F$ tilhører $T_pS = \operatorname{span}(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$, må gælde $\nabla_{p,S}F = 0$.

For sidste del af opgaven bemærker vi først, at $\nabla F = (yz, xz, xy)$. Tangentplanen i et punkt $(x,y,z) \in S^2$ består præcis af de vektorer, der står vinkelret på $N = (x,y,z)$. Altså er $\nabla_{p,S}F = \nabla F - t(x,y,z)$, hvor $t$ er

$$t = \nabla F \cdot N = 3xyz.$$

Det vil sige, at

$$\nabla_{p,S}F = (yz - 3x^2yz, xz - 3xy^2z, xy - 3xyz^3).$$

Hvis enten $x$, $y$, eller $z$ er 0, er $F(x,y,z) = 0$, hvilket klart ikke er et maksimum, så antag først at hverken $x$, $y$, eller $z$ er 0. Da er $\nabla_{p,S} F = 0$, hvis $1 = 3x^2 = 3y^2 = 3z^2$. Ved at undersøge de forskellige muligheder finder vi, at $F$ har maksimum i punkterne

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

hvor $F$ i alle fire punkter antager værdien $3^{-3/2}$. Bemærk endelig, at $F$ if. noternes Korollar 5.50 rent faktisk antager sin maksimumsværdi på $S^2$, da $S^2$ er kompakt. $\square$

**Ugeseddelopgave 4.** Lad $S$ være en regulær flade og antag at $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er en diffeomorfi. Vis at $F(S)$ er en regulær flade og bestem $T_{F(p)}F(S)$ for alle punkter $p \in S$.

*Bevis.* Lad $\{\sigma_\alpha, U_\alpha\}$ være et atlas for $S$. Vi påstår, at $\{F \circ \sigma_\alpha, U_\alpha\}$ udgør et atlas for $F(S)$. Lad os først observere, at de overdækker: Hvis $p \in F(S)$, er $F^{-1}(p) \in S$, så der findes $\alpha$, så $F^{-1}(p) \in \sigma_\alpha(U_\alpha)$, og dermed er $p \in F \circ \sigma_\alpha(U_\alpha)$. Billedet $F \circ \sigma_\alpha(U_\alpha)$ er åbent i $F(S)$, da $F$ er en homøomorfi fra $S$ til $F(S)$ (da $F$ er en homøomorfi fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$) og $\sigma_\alpha(U_\alpha)$ er åben i $S$. Hver funktion $F \circ \sigma_\alpha$ er en homøomorfi på sit billede, da både $F$ og $\sigma_\alpha$ er homøomorfier. Ligeledes er $F \circ \sigma_\alpha$ alle glatte, da $F$ og $\sigma_\alpha$ er det. Endelig er de nye parametriseringer regulære, hvis

$$(F \circ \sigma_\alpha)_u(u,v) = DF_{\sigma_\alpha(u,v)}(\sigma_\alpha)_u(u,v),$$
$$(F \circ \sigma_\alpha)_v(u,v) = DF_{\sigma_\alpha(u,v)}(\sigma_\alpha)_v(u,v)$$

er lineært uafhængige. Dette er tilfældet, da $DF_{\sigma_\alpha(u,v)}$ er invertibel. Tangentplanen er som altid udspændt af disse to vektorer og her står desuden, at

$$T_{F(p)}F(S) = DF_p(T_pS).$$

$\square$

**Ugeseddelopgave 5.** Lad $S \subseteq \mathbb{R}^3$ være en regulær flade således at $T_pS$ er den samme plan for alle $p \in S$. Antag at for alle $p_1, p_2 \in S$ findes $\varepsilon > 0$, $T > 0$, og en glat kurve $\gamma : (0 - \varepsilon, T + \varepsilon)$ med $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(T) = p_2$. Vis at $S$ er en åben delmængde af en plan.

Bemærk at man kan vise, at betingelsen på $S$ er ækvivalent til, at $S$ er kurvesammenhængende og dermed sammenhængende.

*Bevis.* Vi vil vise, at der findes $v, p_0 \in \mathbb{R}^3$, så $(p - p_0) \cdot v = 0$ for alle $p \in S$. Lad $p_0 \in S$ være vilkårlig, og lad $v$ være en normalvektor til $T_{p_0}S$ (og dermed til alle $T_pS$). Lad $p \in S$ være et andet punkt og vælg $\gamma$ som angivet i opgaven, så $\gamma(0) = p_0, \gamma(T) = p$. Da tangentplanerne alle er antaget ens ved vi, at $v$ er normal på $T_{\gamma(t)}S$ for alle $t$. Vi finder nu, at

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) - p_0) \cdot v = \gamma'(t) \cdot v - p_0 \cdot v = -p_0 \cdot v,$$

så $(\gamma(t) - p_0) \cdot v$ er konstant. Funktionen er 0 for $t = 0$, og dermed er den det også for $t = T$. $\square$