Ølopgaver i geometri

16. april 2012

Hvis I er interesserede i løsninger af nedenstående opgaver, men ikke selv kan finde på nogen, skal I selvfølgelig bare sige til. Øllet kan som udgangspunkt vindes en uges tid, efter at opgaven er stillet, men I skal selvfølgelig være velkomne til at give besvarelser efterfølgende – disse præmieres så med et navn i en pdf-fil på nettet.

Foruden opgaverne nedenfor, tag også et kig på sidste års ølopgavesæt. Heri bruges i Ølopgave 1 notationen

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

for $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ølopgave 2 er i virkeligheden allerede stillet som TØ-opgave i uge 8.

Bonus til aflevering 5. Find et fuldstændigt metrisk rum X, et $m > 1$ og en afbildning $S : X \to X$, så S ikke er en kontraktion, men S^m er.

Bonus til aflevering 8. Vis at etpunktskompaktificationen af $\mathbb{R}^n$ er homøomorf med $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ (med sportopologien fra $\mathbb{R}^{n+1}$).

Ølopgave 4. Den følgende opgave udvider resultatet fra Opgave 5.9.23, som blev diskuteret til TØ i uge 8.

1. Er S^2 og S^3 homøomorfe?
2. Er S^n og S^m homøomorfe, når $n \neq m$?
3. Er $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ homøomorfe, når $n \neq m$?

Ølopgave 5. Lad $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ med sportopologien fra $\mathbb{R}^3$. Vi så, at C er homøomorf med $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, og spørger i tråd med opgaven ovenfor om følgende:

1. Er S^2 og $\mathbb{R}^2$ homøomorfe?
2. Er S^2 og C homøomorfe?
3. Er $\mathbb{R}^2$ og C homøomorfe?