ØLOPGAVER I GEOMETRI

7. maj 2011

Her er en ny samling ølopgaver. Hvis I er interesserede i løsninger af opgaverne, men ikke selv kan finde på nogen, skal I selvfølgelig bare sige til. Øllet kan vindes en uges tid efter opgaven er stillet, men I skal selvfølgelig være velkomne til at give besvarelser efterfølgende – disse præmieres så med et navn i en pdf-fil på nettet(!)

Ølopgave 1 (Mads)**.** Betragt de følgende mængder af matricer:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) &= M_n(\mathbb{R}),\\
GL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertibel}\}\\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}\\
SL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertibel}, \det(A) = 1\}\\
\mathfrak{o}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}\\
O(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^TA = I\}\\
SO(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^TA = I, \det(A) = 1\}.
\end{aligned}$$

Her står "'gl" for "generel lineær", "sl" for "speciel lineær"[1], "o" for "ortogonal" og "so" for "speciel ortogonal".

1. Vis at der for alle $A \in M_n(\mathbb{R})$ gælder, at $\exp(\mathrm{tr}(A)) = \det(\exp(A))$. (Start eventuelt med de diagonaliserbare.)
2. Hvilke af ovenstående 7 mængder er vektorrum (med matrixaddition og reel skalarmultiplikation) eller grupper (med matrixmultiplikation)? Hvilke er indeholdt i andre som underrum eller undergrupper?
3. Lad $A(t) \in M_2(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, være diagonalmatricerne $\mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ og sæt $B = A'(0)$. Lad $R(\theta) \in M_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \mathbb{R}$, betegne matricerne for rotation med vinkel θ i $\mathbb{R}^2$ og lad $S = R'(0)$. Hvilke af grupperne tilhører $A(t)$ og $R(\theta)$? Hvilke vektorrum tilhører B og S?
4. Lad G være en af grupperne ovenfor. *Liealgebraen hørende til G* er mængden af alle matricer A, så $\exp(tA)$ tilhører G for alle $t \in \mathbb{R}$. Find Liealgebraerne hørende til de fire grupper.

Bonus. Overvej det komplekse tilfælde: Hvad er Liealgebraerne hørende til mængderne $GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), U(n)$ og $SU(n)$ bestående af hhv. invertible komplekse matricer, invertible med determinant 1, unitære og unitære med determinant 1?

Ølopgave 2 (Mikkel)**.** Lad $V \subseteq \mathbb{R}^2$ være foreningen af $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,1]\}$ og etpunktsmængden $\{(0,0)\}$. Vis at V er sammenhængende men ikke kurvesammenhængende.

Ølopgave 3. Vis at cylinderen $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ikke er homøomorf med $\mathbb{R}^2$.

[1] Og en huskeregel til $\mathfrak{sl}$ er, at "sl" også kunne stå for "sporløs".