Noter til Lineær algebra-TØ uge 7

17. februar 2010

Opgave A. *Lad $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ og lad r være et helt positivt tal. Antag at A^r er invertibel og vis, at A er invertibel. Lad $N \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ opfylde at $N^r = 0$ for et r (N kaldes* nilpotent*). Vis at $I - N$ er invertibel.*

Bevis. Som så ofte, når ting skal vises at være invertible, kan man med fordel bruge sætningen, der siger, at en matrix er invertibel, hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra 0. I tilfældet her har vi, at $0 \neq \det(A^r) = \det(A)^r$, hvilket må betyde, at $\det(A) \neq 0$. Men som altid er det ikke meningen, at det skal gøres på den måde, før reglen er blevet gennemgået. Vi tyr derfor til kriterierne i sætning 1.4.2, som kæder invertibilitet sammen med løsning af lineære ligningssystemer. Antag at $Ax = 0$ for et $x \in \mathbb{F}^n$ og lad os vise, at der så må gælde $x = 0$.

$$A^r x = A^{r-1}(Ax) = A^{r-1}0 = 0,$$

og da A^r var antaget invertibel får vi, at $x = 0$ som ønsket.
Betragt nu den nilpotente matrix N og lad os vise, at $I - N$ er invertibel. Bemærk at

$$\begin{aligned}(I + N + N^2 + \cdots + &N^{r-1})(I - N)\\ &= I + N + N^2 + \cdots + N^{r-1} - N - N^2 - \cdots - N^r\\ &= I + N^r = I,\end{aligned}$$

idet $N^r = 0$. Her står, at $I + N + \cdots + N^{r-1}$ er en venstreinvers til $I - N$, og da $I - N$ er kvadratisk ved vi fra noternes 1.4.10, at den samme matrix også er en højreinvers. □

Bemærkning. Den sidste opgave kunne også løses ved hjælp af 1.4.2. Lad til det formål $x \in \mathbb{F}^n$ opfylde, at $(N - I)x = 0$ som i første opgave, og lad os vise, at $x = 0$. At $(N - I)x = 0$ betyder, at $Nx = Ix = x$. Denne lighed giver, at $N^2 x = N(N(x)) = N(x) = x$, at $N^3 x = N^2(N(x)) = N^2(x) = x$ og induktivt, at $N^k x = x$ for alle heltallige k større end 0. Specielt gælder det for $k = r$, og $x = N^r x = 0x = 0$, så $x = 0$. Hvorimens denne sidste løsning ikke giver os en eksplicit invers, siger den noget om egenværdierne af en nilpotent matrix: At $Nx = x$ for $x \neq 0$ vil sige, at 1 er en egenværdi for N, men den ovenstående udregning viser, at det ikke kan lade sig gøre ($Nx = x$ giver altid, at $x = 0$). Helt tilsvarende vil $Nx = \lambda x$ give, at $x = 0$ for alle $\lambda \neq 0$, så den eneste mulige egenværdi for en nilpotent matrix er 0.

Opgave B. *Lad $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$, hvor $m < n$. Vis at der ikke findes en matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$ så $BA = I$.*

Bevis. Da A har flere søjler end rækker, vil ligningssystemet $Ax = 0$ være overbestemt; det har uendeligt mange løsninger. Specielt findes der en løsning x, så $x \neq 0$. Hvis der nu fandtes et B, så $I = BA$, ville vi specielt få, at

$$x = Ix = BAx = B0 = 0,$$

men x var valgt forskellig fra 0. □

Bemærkning. Intuitivt (og uformelt) kan opgaven tolkes således: Tænk på A som en lineær afbildning fra $\mathbb{F}^n$ til $\mathbb{F}^m$ og antag for intuitionens skyld, at $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, så $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Hvis der eksisterede en lineær afbildning $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, så $B \circ A = I$, ville det betyde, at vi, hvad end A gør ved $\mathbb{R}^n$, kan gøre det om med $\mathbb{R}^m$ (for sammensætningen er I, og den gør ikke noget som helst), men det lyder usandsynligt: Hvis for eksempel $n = 3$ og $m = 2$, så A er en afbildning fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^2$, kan man tænke på A som noget, der maser rummet fladt, men det er svært at invertere. Helt anderledes forholder det sig, hvis $m > n$; så kan det lade sig gøre, hvis A opfører sig tilstrækkeligt pænt (eller præcist, at $\dim R(A) = n$), som vi vil se nærmere på senere.