Noter til Lineær algebra-TØ uge 18

7. maj 2010

Vi har tidligere set, at ikke alle matricer er diagonaliserbare; f.eks. er en nilpotent matrix kun diagonaliserbar, hvis den er lig 0. Nedenstående opgave giver endnu en familie af eksempler herpå.

Opgave C på ugesedlen. *Sæt*

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & c & c \\ c & b & b \end{pmatrix}.$$

Hvis $a \neq 0$ og $b \neq c$, er A ikke diagonaliserbar.

Løsning. Vi vil se, at 0 er en egenværdi med algebraisk multiplicitet $\mathrm{Alg}(0) > 1$ og geometrisk multiplicitet $\mathrm{Geo}(0) = 1$. Da den algebraiske multiplicitet og geometriske multiplicitet stemmer overens for alle egenværdier i en diagonaliserbar matrix, viser dette det ønskede. Ved i det følgende at lægge anden og tredje række til den første, får vi, at det karakteristiske polynomium for A er givet ved

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} a-x & a & a \\ b & c-x & c \\ c & b & b-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c-x & a+b+c-x & a+b+c-x \\ b & c-x & c \\ c & b & b-x \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c-x)(((c-x)(b-x)-cb) - (b\cdot(b-x) - c\cdot c) + (b\cdot b - (c-x)\cdot c)) \\ &= (a+b+c-x)(bc + x^2 - bx - cx - cb - (b^2 - bx - c^2) + b^2 - c^2 + cx) \\ &= (a+b+c-x)(x^2) = (a+b+c-x)(x-0)(x-0). \end{aligned}$$

Heraf fremgår, at $\mathrm{Alg}(0) = 2$ (eller 3, hvis $a+b+c=0$). Lad os for at bestemme $\mathrm{Geo}(0)$ finde egenrummet $E_0(A) = N(A-0I) = N(A)$ hørende til 0. For et $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ i $N(A)$ gælder $a(x_1+x_2+x_3) = 0$, så

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

da $a \neq 0$. På samme tid får vi $bx_1 + cx_2 + cx_3 = 0$ og $cx_1 + bx_2 + bx_3 = 0$, hvoraf det følger, at $0 = (b-c)x_1 + (c-b)x_2 + (c-b)x_3 = (c-b)(-x_1 + x_2 + x_3)$, så

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

da $b \neq c$. Alt i alt får vi, at $x_1 = 0$, og at $x_2 = -x_3$, så $N(A) \subseteq \mathrm{span}\{(0,1,-1)^T\}$. Nulrummet kunne selvfølgelig bestemmes præcist, som vi nu normalt bestemmer sådanne. Under alle omstændigheder fremgår det, at $\mathrm{Geo}(0) = \dim E_0(A) = \dim N(A) = 1$, hvilket var hvad, der blev påstået. ∎