Noter til Calculus-TØ uge 41

6. oktober 2009

[S] 12.2.15

Vi betragter her rektanglet $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$ og vil finde integralet af funktionen $(x, y) \mapsto x \sin(x + y)$ (lur denne måde at skrive en funktion op på – den bruger man, hvis man ikke gider give funktionen et navn). Idet funktionen er kontinuert, siger Fubinis sætning, at vi kan finde integralet ved at integrere mht. y først og derefter mht. x. Undervejs får jeg brug for, at $x \sin x + \cos x$ er en stamfunktion til $x \cos x$; det viste I i første afleveringsopgave. Ved hjælp af et par substitutioner, som jeg foreslår, at I selv tjekker, får man så følgende:

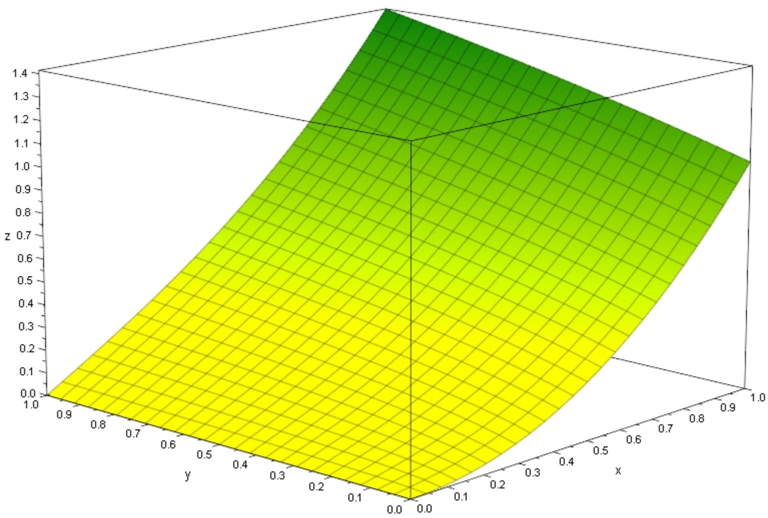
$$\begin{aligned}
\iint_R x \sin(x+y)\, dA &= \int_0^{\pi/6} x \int_0^{\pi/3} \sin(x+y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi/6} x[-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/3}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/6} x(-\cos(x+\pi/3) + \cos(x))\, dx \\
&= [-x\sin(x+\pi/3) - \cos(x+\pi/3)]_0^{\pi/6} + [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/6} \\
&= -\pi/6 \sin(\pi/2) - \cos(\pi/2) + \cos(\pi/3) \\
&\quad - \pi/6 \sin(\pi/2) + \cos(\pi/6) - \cos 0 \\
&= -\pi/6 + 1/2 + \pi/12 + \sqrt{3}/2 - 1 = -\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

[S] 12.2.25

Vi ønsker at finde rumfanget af legemet, der er begrænset af fladen $z = x\sqrt{x^2+y}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, og $z = 0$. Fladen er vist på figur 1, og rumfanget, V, er som sagt til TØ blot integralet af z over rektanglet $[0, 1] \times [0, 1]$. En direkte udregning giver, at

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\, dy\, dx = \int_0^1 x \left[\tfrac{2}{3}(x^2+y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{2}{3} x((x^2+1)^{3/2} - x^3)\, dx = \tfrac{2}{3}\int_0^1 x(x^2+1)^{3/2} - x^4\, dx \\
&= \tfrac{2}{3}\left(\left[\tfrac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1\right) = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{5}(2^{5/2}-1) - \tfrac{1}{5}) \\
&= \tfrac{2}{15}(4\sqrt{2}-1) - \tfrac{2}{15} = \tfrac{2}{15}(4\sqrt{2}-2) = \tfrac{4}{15}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Undervejs i det ovenstående har jeg, som i de lignende TØ-opgaver, benyttet mig af Fubini og substitutionsreglen, og lad mig opfordre jer til, at I selv udfører substitutionen og når frem til de samme stamfunktioner som jeg.



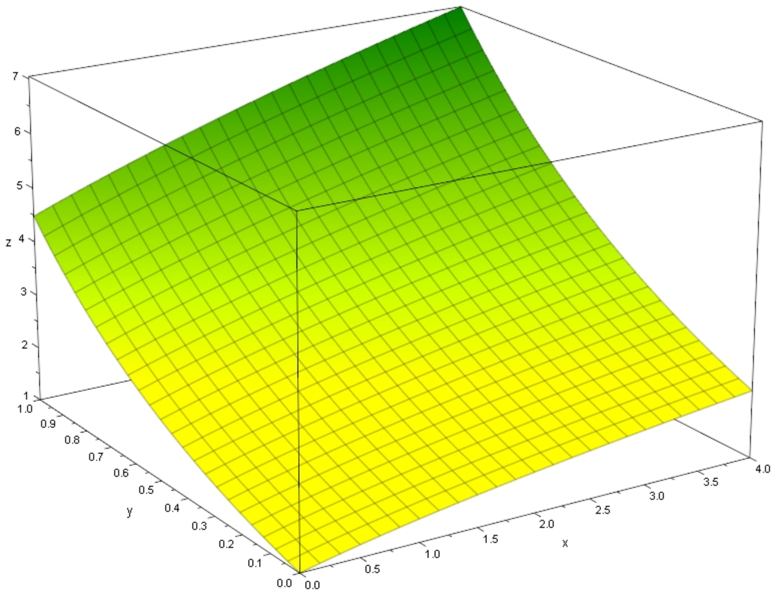
Figur 1: Grafen for funktionen i 12.2.25.

[S] 12.2.32

Vi skal finde den gennemsnitlige værdi af funktionen f over $R = [0,4] \times [0,1]$, idet $f(x,y) = e^y\sqrt{x+e^y}$. Grafen for funktionen er vist på figur 2. Idet arealet af R er 4, giver formlen på s. 834 sammen med Fubini (bemærk at f er kontinuert på R), at

$$\begin{aligned}
f_{ave} &= \tfrac{1}{4}\iint_R f(x,y)\,dA = \tfrac{1}{4}\int_0^4\int_0^3 e^y\sqrt{x+e^y}\,dy,\,dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^4 \tfrac{2}{3}\left[(x+e^y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1}\,dx = \tfrac{2}{12}\int_0^4 (x+e)^{3/2}-(x+1)^{3/2}\,dx \\
&= \tfrac{2}{12}\left[\tfrac{2}{5}(x+e)^{5/2}-\tfrac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_0^4 = \tfrac{4}{60}((4+e)^{5/2}-e^{5/2}-5^{2/5}+1) \\
&\approx 3{,}327.
\end{aligned}$$

Igen har jeg undervejs benyttet mig af substitution.



Figur 2: Grafen for funktionen i 12.2.32.