Noter til Calculus-TØ uge 40

29. september 2009

[S] 11.5.9

I denne opgave betragter vi en funktion af to variable, $z = f(x, y)$, og vi er givet at både x og y desuden er funktioner af én variabel t og skriver $x = g(t)$, $y = h(t)$. Ydermere er vi givet, at $g(3) = 2$, $g'(3) = 5$, $h(3) = 7$, $f_x(2, 7) = 6$ og at $f_y(2, 7) = -8$. Opgaven lyder nu at finde $\frac{dz}{dt}|_{t=3}$. Bemærk først, at $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ (som vi også skriver f_x) samt at $\frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dt} = g'$. Kædereglen, som vi også brugte i de to opgaver, der gik forud for denne, dikterer nu, at

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}_{|t=3} &= \frac{\partial z}{\partial x}_{|(x,y)=(g(3),h(3))}\frac{dx}{dt}_{|t=3} + \frac{\partial z}{\partial y}_{|(x,y)=(g(3),h(3))}\frac{dy}{dt}_{|t=3} \\ &= f_x(g(3), h(3))g'(3) + f_y(g(3), h(3))h'(3) \\ &= 6 \cdot 5 + (-8) \cdot (-4) = 62.\end{aligned}$$

Bemærk at vi er påpasselige med at skelne mellem $\frac{dz}{dt}$, som er en funktion, og $\frac{dz}{dt}_{|t=3}$, som er et tal (differentialkvotienten i $t = 3$, som også kunne skrives $\frac{dz}{dt}(3)$). For at følge op på en TØ-kommentar: Tegnet ∂ bruges til partielt afledede af funktioner med mere end en variabel (som f.eks. $z(x, y) = f(x, y)$, og det er som sådan det nye i forhold til jeres gymnasieviden), mens d bruges om funktioner af én variabel (såsom $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$) og er den differentiation, I kender.

[S] 11.5.17

Vi betragter nu funktionen af to variable $z(x, y) = x^2 + xy^3$, hvor x og y er funktioner af tre variable, $x(u, v, w) = uv^2 + w^3$ og $y(u, v, w) = u + ve^w$. Vi vil nu finde $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ og $\frac{\partial z}{\partial w}$, når $u = 2$, $v = 1$ og $w = 0$. Igen bruges kædereglen og vi finder først den partielt afledede mht. u ved

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y^3)v^2 + 3xy^2.$$

Idet $x(2, 1, 0) = 2$ og $y(2, 1, 0) = 3$ finder vi ved indsættelse i ovenstående, at $\frac{\partial z}{\partial u}(2, 1, 0) = 85$. På helt samme måde kan kædereglen bruges til at finde $\frac{\partial z}{\partial v}$ og $\frac{\partial z}{\partial w}$ og resultaterne viser sig i disse tilfælde at være $\frac{\partial z}{\partial v}(2, 1, 0) = 178$ og $\frac{\partial z}{\partial w}(2, 1, 0) = 54$. Hvis I vil have flere mellemregninger med, kan I som altid fange på den ene eller anden måde.

[S] 11.5.28

Vi bliver bedt om at bruge ligning 7 til at finde $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$, idet vi er givet $\ln(x + yz) = 1 + xy^2z^3$. Vi kan her ikke let differentiere partielt som ellers, da vi ikke umiddelbart kan opskrive z som funktion af x og y; med andre ord er z

defineret *implicit* som funktion af de to variable. Men frygt ej; hjælpen er nær: Idet vi i stedet indfører funktionen

$$F(x, y, z) = \ln(x + yz) - 1 - xy^2z^3$$

følger af ligningen i opgaven, at $F(x, y, z) = 0$. Udledningen i Stewart viser så, at de partielt afledede er givet ved

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{1/(x+yz) - y^2z^3}{y/(x+yz) - 3xy^2z^2} = \frac{y^2z^3(x+yz) - 1}{y - 3xy^2z^2(x+yz)} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{z/(x+yz) - 2xyz^3}{y/(x+yz) - 3xy^2z^2} = \frac{2xyz^3(x+yz) - z}{y - 3xy^2z^2(x+yz)}.
\end{aligned}$$

[S] 11.3.67

Endelig betragter vi i denne opgave to funktioner f og g af én variabel, der begge kan differentieres to gange; f og g er altså funktioner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ som vi fra gammel lærdom ved alt om. Vi kan nu indføre en ny funktion $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$, som nu – modsat f og g – er en funktion af *to* variable, hvor her a er en konstant. Vi bliver bedt om at tjekke, at funktionen opfylder den *partielle differentialligning* $u_{tt} = a^2u_{xx}$ (sådanne differentialligninger udgør, sammen med lidt lineær algebra, fundamentet for praktisk talt al fysik, for nu at være lidt bombastisk). Når man skal tjekke en lighed som denne, kommer det næsten altid ud på at regne begge sider ud og se, at de giver det samme. Hvis man bare klør på, er det måske imidlertid ikke helt klart, hvordan man vil differentiere f med hensyn til t, når nu argumentet til funktionen f er $x+at$ (og tilsvarende med g). For at imødekomme denne underlighed indfører vi derfor to nye variable $v = x + at$ og $w = x - at$, således at $u(x, t) = f(v) + g(w)$. Kædereglen siger nu, at

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dg}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = f'(v)a - g'(w)a.$$

Denne kan vi så selvfølgelig give os til at differentiere endnu engang med hensyn til t og finder, at (overvej!)

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2f''(v) + a^2g'(w) = a^2(f''(v) + g''(w)).$$

Helt samme procedure kunne vi have benyttet med x i stedet for t, og her får vi (overvej!)

$$u_{xx} = f''(v) + g''(w).$$

Her står imidlertid at læse, at $u_{tt} = a^2u_{xx}$, som var hvad vi var ude efter. Lad mig opfordre til, at I selv prøver at udfylde eventuelle huller/mellemregninger i det ovenstående.