Noter til Calculus-TØ uge 38

22. september 2009

[S] 11.4.1+3

Vi betragter fladen givet ved $z = 4x^2 - y^2 + 2y$ og vil finde ligningen for tangentplanen til fladen i punktet $(-1, 2, 4)$. Vi observerer først, at $f_x(x, y) = 8x$, at $f_y(x, y) = -2y + 2$ og dermed, at $f_x(-1, 2) = -8$ og $f_y(-1, 2) = -2$. Ved nu at bruge resultatet på side 770, får vi, idet vi sætter $x_0 = -1, y_0 = 2$ og $z_0 = 4$, at

$$z - 4 = (-8)(x + 1) + (-2)(y - 2),$$

eller altså

$$z = (-8)x - 8 - 2y + 4 + 4 = -8x - 2y.$$

Helt samme fremgangsmåde benyttes i opgave 3, hvor vi i stedet betragter funktionen $z = y\cos(x - y)$ i pumnktet $(2, 2, 2)$. Det viser sig her, at tangentplanen er givet ved det simple udtryk $z = y$.

[S] 11.4.9

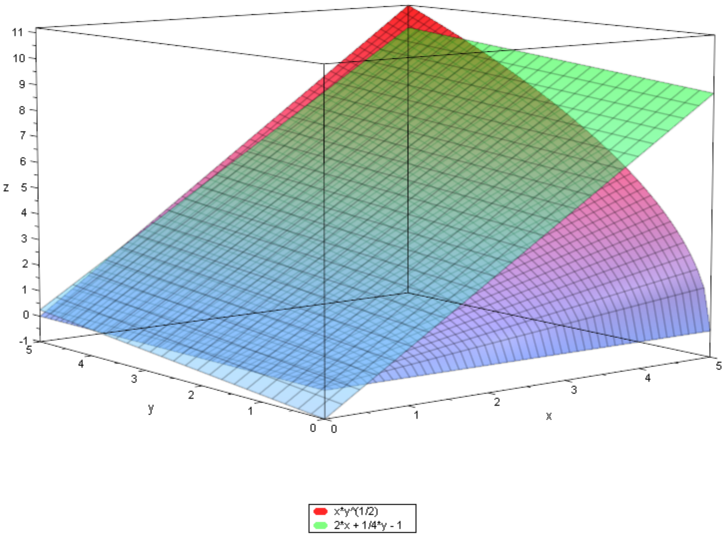
I denne opgave skal vi forklare, hvorfor funktionen f, givet ved $f(x, y) = x\sqrt{y}$, er differentiabel i punktet $(1, 4)$ samt finde lineariseringen af funktionen i punktet. For at vise, at funktionen er differentiabel, er det ifølge sætning 8 på s. 773 tilstrækkeligt at vise, at de partielt afledede af f eksisterer nær punktet $(1, 4)$ og er kontinuerte i punktet. Vi regner derfor og finder, at

$$f_x(x, y) = \sqrt{y} \quad \text{og} \quad f_y(x, y) = \tfrac{1}{2}xy^{-1/2}.$$

Både f_x og f_y er defineret og er kontinuerte omkring $(1, 4)$ – det eneste, der evt. kunne være gået galt var hvis vi betragtede et punkt med $y = 0$. Vi finder desuden, at $f_x(1, 4) = 2$ og $f_y(1, 4) = \frac{1}{4}$. Pr. definition af lineariseringen, fås

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &= 2 + 2(x - 1) + \tfrac{1}{4}(y - 4) = 2x + \tfrac{1}{4}y - 1. \end{aligned}$$

Lidt bonus: Lineariserinen er en lineær approksimation til funktionen f, som er lig f i punktet $(1, 4)$, og som ofte er meget nemmere at regne på end funktionen selv, om end de kun stemmer overens i en omegn af det givne punkt. Dette er hvad der fremgår af nedenstående figur, hvor grafen for f er vist sammen med grafen for lineariseringen. Som vi kan se, stemmer de overens i punktet $(1, 4)$ (i venstre side af billedet), og lineariseringen fungerer som approksimation af funktionen i en omegn af punktet.



[S] 11.4.19

Vi bliver bedt om at finde differentialet til funktionen $z = x^3 \ln(y^2)$. Pr. definition af differentialet gælder

$$\begin{aligned} dz &= f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 3x^2 \ln(y^2)dx + x^3 \tfrac{1}{y^2} 2y dy \\ &= 3x^2 \ln(y^2)dx + 2x^3 \tfrac{1}{y} dy. \end{aligned}$$

[S] 11.4.23

Vi er givet funktionen $z(x,y) = 5x^2 + y^2$ og ønsker at finde Δz hhv. dz når (x,y) ændrer sig fra $(1,2)$ til $(\frac{21}{20}, \frac{21}{10})$. Opgaven tjener til illustration af hvordan differentialet dz kan benyttes til undersøgelse af funktionsændringer, når argumentet (x,y) varieres en smule. Ønsker man en mere grafisk intuition om disse størrelser, er det værd at tage et kig på figur 7 på s. 775.
Ved indsættelse i udtrykket for z finder vi

$$\Delta z = z(\tfrac{21}{20}, \tfrac{21}{10}) - z(2,1) = \tfrac{369}{400} = 0,9225.$$

Pr. definition er differentialet lig

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dz + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

hvor dx og dy blot er frie variable, der i denne opgaves kontekst betragtes som ændringerne i x og y (se diskussionen efter definition 10 s. 774). Partiel differentiation af z giver

$$dz = 10x\,dx + 2y\,dy,$$

og med $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = \frac{1}{20}$, og $dy = \Delta y = \frac{1}{10}$ fås

$$dz = \tfrac{9}{10} = \tfrac{360}{400},$$

som bemærkes at være i nærheden af, om end en smule under værdien af Δz.

[S] 11.4.31

I denne opgave betragter vi modstanden i 3 parallelkoblede elektriske modstande. Den matematiske model udsiger, at den samlede modstand er

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \tag{1}$$

hvor R_i er modstanden i modstand i. Vi er givet tre værdier for modstandene og en fejlmargin på $0,5\%$. Vi vil herudfra finde den største mulige totale fejl på den totale modstand R. Som i eksempel 6, side 776, gør vi det ved hjælp af differentialer. Skriver vi lidt om på (1) får vi

$$R = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}$$

og differentiation af R med hensyn til hver af de tre variable, R_i, får vi (ved brug af kædereglen)

$$\begin{aligned}
dR =& \frac{\partial R}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} dR_2 + \frac{\partial R}{\partial R_3} dR_3 \\
=& (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_1^{-2} dR_1 + (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_2^{-2} dR_2 \\
&+ (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_3^{-2} dR_3 \\
=& (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} (R_1^{-2} dR_1 + R_2^{-2} dR_2 + R_3^{-2} dR_3).
\end{aligned}$$

Ved indsættelse af værdierne $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 50\,\Omega$, $dR_1 = 0,005 R_1$, $dR_2 = 0,005 R_2$, og $dR_3 = 0,005 R_3$ fås den maksimale fejl $\Delta R \approx dR \approx 0,059\,\Omega$.