Ølopgaver i Intr. Mat. Anal.

9. november 2011

Hvis I er interesserede i løsninger af nedenstående opgaver, men ikke selv kan finde på nogen, skal I selvfølgelig bare sige til. Øllet kan vindes en uge efter opgaven er stillet, men I skal selvfølgelig være velkomne til at give besvarelser efterfølgende – disse præmieres så med et navn i en pdf-fil på nettet.

Ølopgave 1. I denne opgave må det bruges, at voluminet af en kugle $B(R)$ med radius R i $\mathbb{R}^n$ er givet ved

$$\operatorname{Vol}(B(R)) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{n/2} R^n}{2\cdot 4\cdots n}, & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2} R^n}{1\cdot 3\cdots n}, & \text{hvis } n \text{ er ulige,} \end{cases}$$

og at voluminet af kuben $[-2,2]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ er givet ved $\operatorname{Vol}([-2,2]^n) = 4^n$.

Betragt nu kuben $[-2,2]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. I hvert punkt i $\mathbb{R}^n$, som har koordinater alle enten 1 eller -1, placeres en n-dimensional kugle med radius 1. I tilfældet $n = 2$ placeres altså kugler i de 4 punkter $(-1,1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$, og mere generelt placeres 2^n kugler i $\mathbb{R}^n$. Lad B_n være kuglen med centrum origo i $\mathbb{R}^n$, der er så stor, at den lige præcist møder hver af de 2^n kugler i et enkelt punkt. Spørgsmålet er nu følgende: Hvordan opfører $\operatorname{Vol}(B_n)$ sig asymptotisk i forhold til $\operatorname{Vol}([-2,2]^n)$? Mere præcist, find

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Vol}(B_n)}{\operatorname{Vol}([-2,2]^n)}$$

og forklar resultatet geometrisk.