Noter til Calculus-TØ uge 40

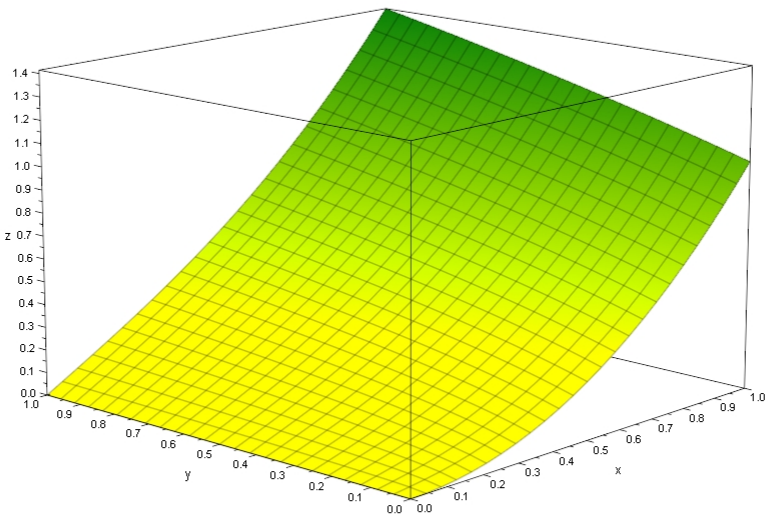
3. oktober 2008

[S] 12.2.25

Vi ønsker at finde rumfanget af legemet, der er begrænset af fladen $z = x\sqrt{x^2 + y}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, og $z = 0$. Fladen er vist på figur 1, og rumfanget, V, er som sagt til TØ blot integralet af z over rektanglet $[0, 1] \times [0, 1]$. En direkte udregning giver, at

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{x^2 + y}\, dy\, dx = \int_0^1 x \left[\tfrac{2}{3}(x^2 + y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{2}{3}x((x^2 + 1)^{3/2} - x^3)\, dx = \tfrac{2}{3}\int_0^1 x(x^2 + 1)^{3/2} - x^4\, dx \\
&= \tfrac{2}{3}\left(\left[\tfrac{1}{5}(x^2 + 1)^{5/2}\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{5}(2^{5/2} - 1) - \tfrac{1}{5}\right) \\
&= \tfrac{2}{15}(4\sqrt{2} - 1) - \tfrac{2}{15} = \tfrac{2}{15}(4\sqrt{2} - 2) = \tfrac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

Undervejs i det ovenstående har jeg, som i de lignende TØ-opgaver, benyttet mig af substitutionsreglen, og lad mig opfordre jer til, at I selv udfører substitutionen og når frem til de samme stamfunktioner som jeg.



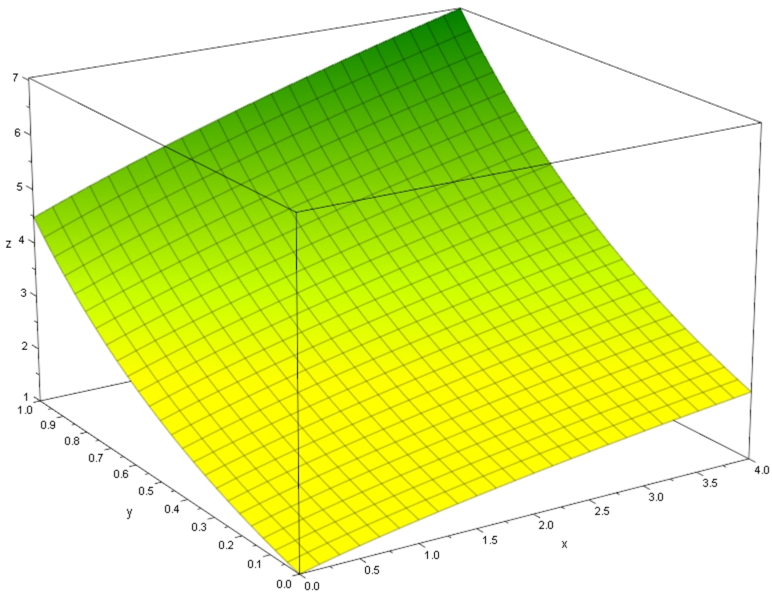
Figur 1: Grafen for funktionen i 12.2.25.

[S] 12.2.32

Vi skal finde den gennemsnitlige værdi af funktionen f over $R = [0,4] \times [0,1]$, idet $f(x,y) = e^y\sqrt{x+e^y}$. Grafen for funktionen er vist på figur 2. Idet arealet af R er 4, giver formlen på s. 834 sammen med Fubini (bemærk at f er kontinuert på R), at

$$\begin{aligned}
f_{ave} &= \tfrac{1}{4}\iint_R f(x,y)\,dA = \tfrac{1}{4}\int_0^4\int_0^3 e^y\sqrt{x+e^y}\,dy,\,dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^4 \tfrac{2}{3}\left[(x+e^y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \tfrac{2}{12}\int_0^4 (x+e)^{3/2} - (x+1)^{3/2}\,dx \\
&= \tfrac{2}{12}\left[\tfrac{2}{5}(x+e)^{5/2} - \tfrac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_0^4 = \tfrac{4}{60}((4+e)^{5/2} - e^{5/2} - 5^{2/5} + 1) \\
&\approx 3,327.
\end{aligned}$$

Igen har jeg undervejs benyttet mig af substitution.



Figur 2: Grafen for funktionen i 12.2.32.