Noter til Calculus-TØ uge 37

12. september 2008

Her er knyttet et par ord til de opgaver, vi ikke nåede torsdag.

Opg. H1.46

Lad os tage ligningerne en for en. Ligningen $r = \sin(\theta/2)$ er begrænset; uanset hvilke θ vi måtte smide ind, bliver r aldrig større end 1. Således må den svare til grafen i II, III eller VI. Ligesom i afleveringsopgaven er den desuden periodisk med periode 4π, og den eneste af de tre nævnte grafer, for hvilken det er tilfældet, er grafen VI. Helt tilsvarende er $r = \sin(\theta/4)$ periodisk med periode 8π, og denne hører altså til III. For $r = \sec(3\theta) = 1/\cos(3\theta)$ må gælde, at r går mod uendelig, når $\cos(3\theta)$ går mod 0; det vil sige, når θ går mod $\pi/6$, $\pi/2$ osv. Dette er netop tilfældet på graf IV og på ingen af de øvrige. I $r = \theta\sin(\theta)$ bliver r vilkårligt stor, når θ bliver det; vi vil ligeledes have $r = 0$, når θ er er på formen $\pi n + \frac{1}{2}$ for heltallige n. Denne opførsel er netop den, der karakteriserer grafen V. Desuden gælder at $r = 0$ for $\theta = 0$; også dette er kun tilfældet på V. Ligningen $r = 1 + 4\cos(5\theta)$ er som de to første begrænset, og må altså høre til II. Endelig må $r = 1/\sqrt{\theta}$ høre til I.

Opg. H1.55

Vi betragter ligningen $r = a\sin\theta + b\cos\theta$, hvor $ab \neq 0$, og ønsker at vise, at denne beskriver ligningen for en cirkel. Som vi har gjort i lignende opgaver, multiplicerer vi med r og opnår $r^2 = ar\sin\theta + br\sin\theta$ eller altså $x^2 + y^2 = ax + by$. Vi behøver her ikke bekymre os om tilfældet $r = 0$, idet betingelsen $ab \neq 0$ betyder, at $a \neq 0$ og $b \neq 0$. Da $\sin\theta$ og $\cos\theta$ ikke begge kan være 0 for samme θ har vi alt i alt, at $r \neq 0$ for alle θ. Vi får altså ligningen

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0. \tag{1}$$

Idet vi nu bemærker, at

$$\left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 - \tfrac{a^2}{4} = x^2 - ax + \tfrac{a^2}{4} - \tfrac{a^2}{4} = x^2 - ax,$$

og tilsvarende

$$\left(y - \tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4} = y^2 - by,$$

kan vi skrive ligningen (1) som

$$\left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 - \tfrac{a^2}{4} + \left(y - \tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4} = 0,$$

eller, ækvivalent,

$$\left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{b^2}{4} = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Vi kan heraf aflæse, at ligningen beskriver en cirkel med centrum $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ og radius $\sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.