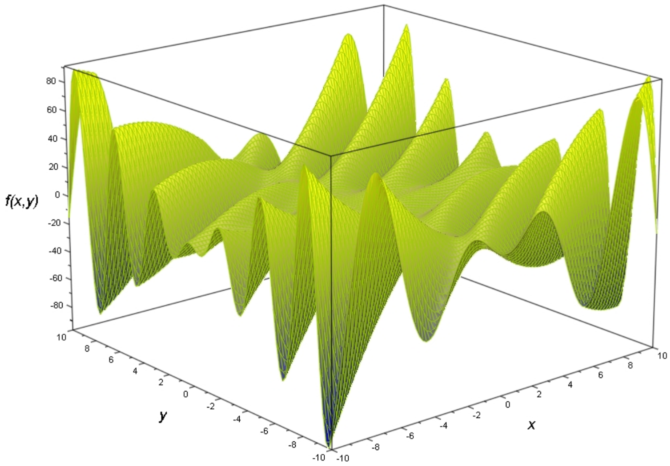
Noter til Calculus-TØ uge 36

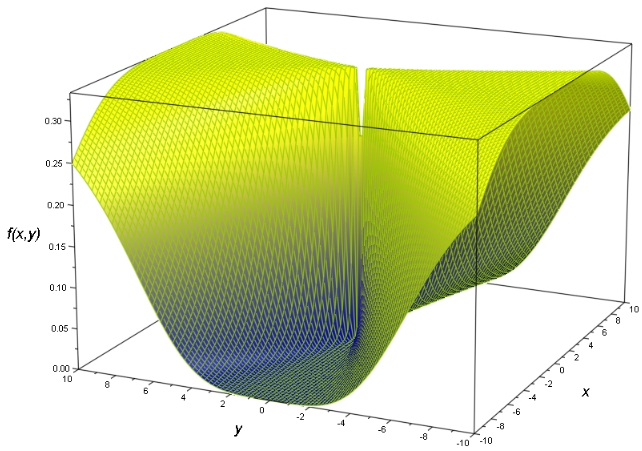
5. september 2008

Her følger de lovede grafer af funktioner i flere variable og lidt forklaring hertil. Jeg har desuden vedlagt min løsning til den sidste opgave, som vi ikke nåede at gennemgå.

Funktioner af flere variable



Figur 1: $(x, y) \mapsto xy\cos(x - 2y)$



Figur 2: $(x, y) \mapsto \frac{y^4}{x^4+3y^4}$

På figur 1 ovenfor ses grafen for funktionen fra opgave 11.2.6, $(x, y) \mapsto xy\cos(x - 2y)$, (her er $\mapsto$ bare meget anvendt notation, når man ikke vil give funktionen et navn). Funktionen er, som vi nåede frem til, kontinuert, og den ønskede grænseværdi findes ved indsættelse af $x = 6$ og $y = 3$. Omvendt står det til med funktionen $(x, y) \mapsto \frac{y^4}{x^4+3y^4}$, hvis graf er vist på figur 2. Af figuren fremgår nemlig det, som Jacob nåede frem til: At man får en anden grænseværdi ved at følge funktionsværdierne mod $(0, 0)$ langs y-aksen (hvor $x = 0$; øverst på "bakken"), end hvis man går langs x-aksen (hvor $y = 0$; nede i grafens "dal").

Opg. H1.19

Vi betragter kurven repræsenteret ved den kartesiske ligning $x^2+y^2 = 2cx$ for et eller andet c. Som bekendt gælder det generelt, at $r^2 = x^2+y^2$, og at $x = r\cos\theta$. Vi kan derfor slutte at vores kartesiske ligning er ækvivalent med $r^2 = 2c\cos\theta$ i polære koordinater, eller, skrevet lidt anderledes, $r(r - 2c\cos\theta) = 0$. Vi vil nu gerne kunne sige, at vores ønskede ligning er $r = 2c\cos\theta$, men som jeg forsøgte at forklare til sidst til TØ, skal man være forsigtig med at dividere med r, når r kan antage værdien 0, så lad mig gentage argumentet fra TØ: Udtrykket $r(r - 2c\cos\theta)$ er blot et produkt af udtrykkene r og $r - 2c\cos\theta$. Hvis dette produkt skal være 0, må gælde at en af faktorerne i produktet er 0: Altså at $r = 0$ *eller* $r - 2c\cos\theta = 0$. Skriver vi lidt om på den sidste får vi $r = 2c\cos\theta$. Pointen er nu, at disse ligninger er ækvivalent med den *ene* ligning $r = 2c\cos\theta$; vi kan nemlig ud fra denne ene ligning få ligningen $r = 0$ ved f.eks. at bruge $\theta = \frac{\pi}{2}$. Vi har altså set, at ligningen $x^2 + y^2 = 2cx$ er ækvivalent med "$r = 0$ eller $r = 2c\cos\theta$", som igen er ækvivalent med ligningen $r = 2c\cos\theta$.
Nu er det ikke meningen, at dette skal være en rigtig besværlig opgave, men eksemplet illustrerer den forsigtighed, som omgang med biimplikationer fordrer.