GEOMETRI-TØ, UGE 8

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

Opvarmningsopgave 1. Lad X være en mængde og $\mathcal{T}$ familien af alle delmængder på X. Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi – den diskrete topologi på X. Vis at $(X, \mathcal{T})$ er kompakt, hvis og kun hvis X er endelig.

Bevis. Alle delmængder af X ligger i $\mathcal{T}$, så det er klart, at de tre betingelser for at være en topologi er opfyldt for $\mathcal{T}$.

Hvis X er endelig, er den også kompakt, som vi før har set. Antag at X er kompakt og betragt for hvert punkt $x \in X$ den åbne mængde $U_x = \{x\}$. Da er $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ en åben overdækning, der pr. antagelsen om kompakthed kan udtyndes til en endelig; det vil sige, at

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

så X er endelig. □

Lemma 1. *En forening af et endeligt antal kompakte delmængder $A_1, \ldots, A_n$ af et topologisk rum X er selv kompakt.*

Bevis. Vi benytter karakterisationen i Lemma 5.33. Lad $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ være en overdækning af $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Da vil $\{U_\alpha\}$ også være en overdækning af hvert A_i, så for hvert $i = 1, \ldots, n$ findes en endelig mængde $J_i \subseteq I$, så $A_i \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_i} U_\alpha$. Samlet set får vi, at $J = J_1 \cup \cdots \cup J_n \subseteq I$ er endelig, og

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

så $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ er kompakt. □

Opvarmningsopgave 2. Lad $(X, \mathcal{T}')$ være et Hausdorffrum. Lad

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ er kompakt i } \mathcal{T}'\} \cup \emptyset.$$

Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi på X.

Bevis. Lad U_α være en familie af mængder i $\mathcal{T}$, så $X \setminus U_\alpha$ er kompakt i $\mathcal{T}'$ for alle α. Da $(X, \mathcal{T}')$ er Hausdorff er mængderne $X \setminus U_\alpha$ ydermere lukkede i $\mathcal{T}'$, pr. Sætning 5.35 (ii). Da er

$$X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus U_\alpha)$$

også lukket i $\mathcal{T}'$. Mængden er desuden en delmængde af den kompakte mængde $X \setminus U_\alpha$, for et vilkårligt valg af α, og pr. Sætning 5.35 (i) er mængden kompakt i $\mathcal{T}'$, så $\bigcup_\alpha U_\alpha$ er i $\mathcal{T}$.

Lad U_1, U_2 ligge i $\mathcal{T}$, så som før $X \setminus U_i$ er kompakte i $\mathcal{T}'$ for $i = 1, 2$. Da er

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2).$$

Da en endelig forening af kompakte mængder if. lemmaet ovenfor selv er kompakt står her, at $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Endelig er det givet, at $\emptyset \in \mathcal{T}$, og da $X \setminus X = \emptyset$ er kompakt, er $X \in \mathcal{T}$. □

Topologien $\mathcal{T}$ er lidt spøjs: Selvom $\mathcal{T}'$ er antaget Hausdorff, vil $\mathcal{T}$ kun selv være Hausdorff, hvis X er kompakt i $\mathcal{T}'$.

Opvarmningsopgave 3. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \subseteq \mathbb{R}^3$ en flade og $\sigma : U \to S$ en parametrisering af en åben delmængde $\sigma(U) \subseteq S$. Vis at $W \subseteq \sigma(U)$ er åben i S, hvis og kun hvis $\sigma^{-1}(W)$ er åben i $\mathbb{R}^2$.

Bevis. Bemærk først, at W er åben i $\sigma(U)$, da mængden kan skrives $W = W \cap \sigma(U)$, og $\sigma(U)$ er åben i S. Da $\sigma : U \to \sigma(U)$ er en homøomorfi, og dermed specielt kontinuert, og $W \subseteq \sigma(U)$ er åben, er $\sigma^{-1}(W)$ åben i U, så vi kan skrive $\sigma^{-1}(W) = U \cap V$ for en åben mængde V i $\mathbb{R}^2$. Vi ved, at U er åben i $\mathbb{R}^2$ (da det ellers slet ikke ville give mening at kalde σ en parametrisering), så $\sigma^{-1}(W)$ er åben i $\mathbb{R}^2$.

Omvendt får vi, at hvis $\sigma^{-1}(W)$ er åben i $\mathbb{R}^2$ og dermed i U, så er $W = \sigma(\sigma^{-1}(W))$ åben i $\sigma(U)$, da $\sigma^{-1} : \sigma(U) \to U$ er kontinuert. Da kan vi skrive $W = \sigma(U) \cap V$ for en åben mængde V i S, og da $\sigma(U)$ selv er åben, er W åben i S. □

Det følgende lemma er en umiddelbar generalisering af Opgave 5.9.11, som vi tidligere har set på.

Lemma 2. *Lad $\{U_\alpha\}$ er en åben overdækning af et topologisk rum X, lad Y være et andet topologisk rum og lad $f : X \to Y$ være en funktion. Hvis $f|_{U_\alpha}$ er kontinuerte mht. sportopologierne på U_α for alle α, er f kontinuert.*

Bevis. Lad $V \subseteq Y$ være åben. Vælg åbne mængder V_α i X, så $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V) = U_\alpha \cap V_\alpha$. Da U_α er en overdækning, er

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha \cap V_\alpha,$$

som er åben i X. □

Opvarmningsopgave 4. Lad $\{\sigma_i : U_i \to S\}$ være et atlas på en flade $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Lad $f : S \to \mathbb{R}$ være en funktion. Vis at f er kontinuert, hvis og kun hvis $f \circ \sigma_i : U_i \to \mathbb{R}$ er kontinuert for alle i.

Bevis. Antag at $f : S \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Da hver σ_i er kontinuert, er $f \circ \sigma_i$ det også.

Antag nu, at hver $f \circ \sigma_i : U_i \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Ved at sammensætte med den kontinuerte afbildning $\sigma_i^{-1} : \sigma_i(U_i) \to U_i$, får vi, at $f|_{\sigma_i(U_i)}$ er kontinuert for alle i. Resultatet følger nu af lemmaet ovenfor. □

[S], Opgave 5.9.21. Vis at den n-dimensionale kugleskal $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ er sammenhængende.

Bevis #1. Lad $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Betragt afbildningerne $f_\pm : D^n \to S^n$ givet ved

$$f_+(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right),$$
$$f_-(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

Bemærk nu, at $S^n = f_+(D^n) \cup f_-(D^n)$: Lad $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n$. Det vil sige, at

$$x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

så $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ er billedet af $(x_1, \dots, x_n)$ under f_+ eller f_-, afhængigt af, om x_{n+1} er positiv eller negativ.

Da D^n er konveks, er den ifølge Eksempel 5.28 sammenhængende, så $f_\pm(D^n)$ er sammenhængende. Da $(1, 0, \dots, 0) \in f_+(D^n) \cap f_-(D^n)$, følger af Sætning 5.26 (iii), at $f_+(D^n) \cup f_-(D^n) = S^n$ er sammenhængende. □

Bevis #2. Hvis man vil tro på, at $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ er kurvesammenhængende (de fleste punkter kan forbindes med rette linjer; man skal bare passe lidt på tilfældet, hvor punkterne ligger diametralt modsat i forhold til 0), følger af Eksempel 5.28, at $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ er sammenhængende. Da S^n er billedet af afbildningen $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ givet ved $x \mapsto x/\|x\|$, følger af Sætning 5.26 (iv), at S^n er sammenhængende. □

[S], Opgave 5.9.23. Vis at S^1 og S^2 ikke er homøomorfe.

Bevis. Idéen i opgaven er den helt centrale i matematik at finde en god invariant; en størrelse, der bliver bevaret under homøomorfi og dermed kan bruges til at adskille forskellige rum fra hinanden, hvis invarianterne ikke stemmer overens. I nærværende opgave er denne invariant kurvesammenhængenhed.

Bemærk først, at hvis X og Y er topologiske rum, og $f : X \to Y$ en homøomorfi, og X er kurvesammenhængende, så er Y det også. Hvis $y_0, y_1 \in Y$, så findes en kontinuert kurve $\gamma : [0,1] \to X$, så $\gamma(0) = f^{-1}(y_0)$, $\gamma(1) = f^{-1}(y_1)$. Da er $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ kontinuert, og $f \circ \gamma(0) = y_0$ og $f \circ \gamma(1) = y_1$.

Antag for modstrid, at $f : S^2 \to S^1$ er en homøomorfi. Da vil der om vilkårlige punkter $p_1, p_2 \in S^2$ gælde, at

$$f|_{S^2 \setminus \{p_1,p_2\}} : S^2 \setminus \{p_1, p_2\} \to S^1 \setminus \{f(p_1), f(p_2)\}$$

ligeledes er en homøomorfi.

Lad $p_1 = (1,0,0), p_2 = (0,0,1) \in S^2$. Da er $S^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ kurvesammenhængende; dette ses nemmest ved at beskrive punkter og kurver i sfæriske koordinater. Omvendt påstår vi, at $S^1 \setminus \{f(p_1), f(p_2)\}$ ikke er kurvesammenhængende, hvilket giver den ønskede modstrid.

Lad

$$f(p_1) = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)), \quad f(p_2) = (\cos(\theta_2), \sin(\theta_2))$$

for $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi]$ og antag UTAG, at $\theta_1 < \theta_2$. Sæt

$$U = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 \mid \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}, V = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 \mid \theta \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi)\}.$$

Disse mængder er disjunkte, ikke-tomme, åbne og forener til hele S^1, der derfor ikke er sammenhængende, og derfor heller ikke kan være kurvesammenhængende.

Alternativt kunne man også have benyttet sammenhængenhedsbegrebet som sin invariant og vist, at $S^2 \setminus \{N, S\}$ er sammenhængende. Enten som ovenfor eller ved at bruge et argument i stil med forrige opgave. □

[S], Opgave 5.9.16. Lad X være et topologisk rum. Vis at der defineres en ækvivalensrelationen ved at lade $x \sim y$ på X, hvis og kun hvis, der findes en sammenhængende delmængde, som indeholder både x og y. Ækvivalensklasserne kaldes *sammenhængskomponenter*.

Vis at en sammenhængskomponent er lukket.

Vis at hvis X har endeligt mange sammenhængskomponenter, så er de åbne.

Find sammenhængskomponenterne af $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ og afgør, om de er åbne.

Bevis. Da $\{x\}$ er sammenhængende for alle $x \in X$, er $x \sim x$. Hvis der findes en sammenhængende mængde, der indeholder x og y, vil den også indeholde y og x, så hvis $x \sim y$, er $y \sim x$. Hvis endelig der for tre punkter x, y og z i X gælder, at der findes en sammenhængende mængde A, så $x, y \in A$ og en sammenhængende mængde B, så $y, z \in B$, så vil $A \cup B$ være sammenhængende pr. Sætning 5.26 (iii), og $x, z \in A \cup B$, så hvis $x \sim y$ og $y \sim z$ gælder $x \sim z$.

Lad A være en sammenhængskomponent. Vi påstår, at A er sammenhængende. Lad $x \in A$ være vilkårlig og tænk på A som

$$A = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

For alle $y \in A$ findes en sammenhængende mængde A_y indeholdende x og y. Bemærk, at $A_y \subseteq A$, da vi ellers ville få en modstrid med definitionen på A. Som altid gælder nu, at $A = \bigcup_{y \in A} A_y$, og da alle A_y indeholder det samme x følger af Sætning 5.26 (iii), at A er sammenhængende. Ved at bruge Sætning 5.26 (ii) med $B = \overline{A}$ får vi ydermere, at $\overline{A}$ er sammenhængende. For hvert $z \in \overline{A}$ gælder så, at $x \sim z$, hvilket betyder, at $z \in A$. Her står, at $A = \overline{A}$, så A er lukket.

Skriv $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, hvor A_i'erne er de disjunkte sammenhængskomponenter. Da er

$$A_i = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup \hat{A}_i \cup \ldots A_n) = (X \setminus A_1) \cap \cdots \cap \widehat{(X \setminus A_i)} \cap \ldots (X \setminus A_n)$$

et endeligt snit af åbne mængder og dermed åbent. Her har vi brugt den almindelige notation, at et objekt med en hat ikke tælles med i rækken.

Vi påstår, at sammenhængskomponenterne for $\mathbb{Q}$ er etpunktsmængder: Hvis $x \sim y$ for $x, y \in \mathbb{Q}$, så findes $A \subseteq \mathbb{Q}$ sammenhængende med $x, y \in A$. Der kan umuligt gælde, at $x \neq y$, for hvis dette var tilfældet, ville der findes et $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mellem x og y, og vi ville kunne skrive

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty));$$

en forening af to ikke-tomme disjunkte delmængder, der begge er åbne i A, hvilket strider mod, at A er sammenhængende. Etpunktsmængder er ikke åbne, da der for enhver åben kugle om et rationalt tal findes andre rationale tal. □

[S], Opgave 5.9.22. Vis at en åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^n$ er kurvesammenhængende og at en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ er en foreningsmængde af disjunkte, sammenhængende og åbne delmængder.

Bevis. Lad A være en åben sammenhængende delmængde af $\mathbb{R}^n$.

For første del indføres begrebet *kurvesammenhængskomponent*: Vi siger, at $x \sim y$ for $x, y \in A$, hvis der findes en kontinuert kurve fra x til y. Det er let at indse, at dette definerer en ækvivalensrelation, og ækvivalensklasserne kalder vi kurvesammenhængskomponenterne.

Som i sidste opgave finder vi, at kurvesammenhængskomponenter er kurvesammenhængende (og derfor sammenhængende). Lad B være en kurvesammenhængskomponent i A og lad os vise, at $B = A$. Dette viser vi ved anvendelse af Proposition 5.23 (iii) ved at vise, at B er både åben og lukket. Lad $x \in B$. Da A er åben, findes en åben kugle om x, der er helt indeholdt i A. Da alle punkter i denne kugle kan forbindes til x med en kurve (en ret linje i dette tilfælde), må hele kuglen være indeholdt i B, som dermed er åben. Af helt samme grund er komplementet til B åbent: Hvis $x \in B^c \cap A$ findes en åben kugle om x, der er helt indeholdt i A. Hvis blot ét af elementerne i denne kugle kunne forbindes med en kurve til et punkt i B, ville det samme gælde punktet x, så kuglen er helt indeholdt i B^c. Altså er B lukket og lig A.

Lad for sidste del af opgaven U være en åben mængde i $\mathbb{R}^n$. Denne er en foreningsmængde af sine disjunkte kurvesammenhængskomponenter, og da U er åben følger som ovenfor, at kurvesammenhængskomponenterne også er det. □

Opgave A. Et topologisk rum X kaldes *lokalkompakt*, hvis der for ethvert $p \in X$ findes en åben omegn U af p, så afslutningen $\overline{U} \subseteq X$ er kompakt. Vis at $\mathbb{R}^n$ er lokalkompakt. Antag at X, Y er lokalkompakte Hausdorffrum. Vis at $X \times Y$ med produkttopologien er lokalkompakt.

Bevis. For at vise at $\mathbb{R}^n$ er lokalkompakt, er det nok at indse, at Heine-Borel giver, at afslutningen af åbne kugler er kompakte, da de er lukkede og begrænsede.

Lad $p = (p_1, p_2) \in X \times Y$. Da findes en åben mængde U_1 om p_1 i X, og en åben mængde U_2 om p_2 i Y, så $\overline{U_1}$ og $\overline{U_2}$ er kompakte i hhv. X og Y. Pr. definition af produkttopologien er $U_1 \times U_2$ en åben omegn af (p_1, p_2). Pr. Sætning 5.41 er $A = \overline{U_1} \times \overline{U_2}$ kompakt. Da X og Y er Hausdorff er $X \times Y$ det også ifølge Korollar 5.48. Det følger af Sætning 5.35 (ii), at A er lukket, og da $U_1 \times U_2 \subseteq A$, gælder også $\overline{U_1 \times U_2} \subseteq A$. Da følger af Sætning 5.35 (i), at $\overline{U_1 \times U_2}$ er kompakt, som ønsket. □

Bevis uden Hausdorff-antagelsen. Faktisk kan vi droppe betingelsen om, at X og Y er Hausdorff: Lad U_1 og U_2 være som før. At $\overline{U_1} \times \overline{U_2}$ er kompakt følger som før, så det er nok at vise, at $\overline{U_1} \times \overline{U_2} = \overline{U_1 \times U_2}$. Dette følger af lemmaet nedenfor. □

Lemma 3. *For $A \subseteq X, B \subseteq Y$ gælder $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

Bevis. Bemærk først, at $\overline{A} \times \overline{B}$ er lukket i $X \times Y$, da

$$X \times Y \setminus (\overline{A} \times \overline{B}) = (X \setminus \overline{A}) \times Y \cup X \times (Y \setminus \overline{B}).$$

Da $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$, og $\overline{A \times B}$ er den mindste lukkede delmængde, der indeholder $A \times B$, står her, at $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$.

Lad os vise, at $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$. Vi skal altså med andre ord vise, at

$$X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A) \times Y \setminus \operatorname{int}(Y \setminus B) \subseteq X \times Y \setminus \operatorname{int}(X \times Y \setminus A \times B).$$

Ved at tage komplementer på begge sider, bliver dette ækvivalent til

$$\begin{aligned}\operatorname{int}(X \times Y \setminus A \times B) &\subseteq X \times Y \setminus (X \setminus (\operatorname{int}(X \setminus A)) \times Y \setminus (\operatorname{int}(Y \setminus B))) \\ &= \operatorname{int}(X \setminus A) \times Y \cup X \times \operatorname{int}(Y \setminus B).\end{aligned}$$

Lad $(x, y) \in \operatorname{int}(X \times Y \setminus A \times B)$. Pr. definition af produkttopologien findes åbne mængder U og V i hhv. X og Y, så $(x, y) \in U \times V$, og $U \times V \subseteq (A \times B)^c$. Dette betyder at der enten gælder $U \cap A = \emptyset$ eller $V \cap B = \emptyset$ (for hvis begge snit var ikke-trivielle, kunne man finde et element i både $U \times V$ og $A \times B$). Hvis $U \cap A = \emptyset$, er $x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$ og ellers er $y \in \operatorname{int}(Y \setminus B)$. Under alle omstændigheder er

$$(x, y) \in \operatorname{int}(X \setminus A) \times Y \cup X \times \operatorname{int}(Y \setminus B)$$

som ønsket. $\square$