GEOMETRI-TØ, UGE 14

Hvis I falder over tryk- eller regne-fejl i nedenstående, må I meget gerne sende rettelser til fuglede@imf.au.dk.

[P] 8.2.1 (helikoiden). Udregn hovedkrumningerne af helikoiden.

Løsning. Husk først, at hovedkrumningerne pr. definition er egenværdierne af Weingartenafbildningen. Husk først, at helikoiden er parametriseret ved $\sigma(u,v) = (v\cos u, v\sin u, \lambda u)$.

Vi ved, at Weingartenafbildningen i basen $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ er $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$, hvor $\mathcal{F}_I$ og $\mathcal{F}_{II}$ er matricerne for første hhv. anden fundamentalform i den givne basis. Disse fandt vi i Opgave 8.1.2 i sidste uge. Resultatet bruges i Proposition 8.2.6 til at vise, at hovedkrumningerne er rødderne til

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} L-\kappa E & M-\kappa F \\ M-\kappa F & N-\kappa G \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0-\kappa(v^2+\lambda^2) & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+v^2}} - \kappa\cdot 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+v^2}} - \kappa\cdot 0 & 0-\kappa\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \kappa^2(v^2+\lambda^2) - \frac{\lambda^2}{\lambda^2+v^2}, \end{aligned}$$

så hovedkrumningerne er $\kappa = \pm\frac{\lambda}{\lambda^2+v^2}$. ■

[P] 9.1.1. Find fire forskellige geodæter på den etlagede hyperboloide, $x^2+y^2-z^2=1$, der går gennem punktet $(1,0,0)$.

Løsning. Ved at se på tegningen får vi først idéen til at betragte følgende to:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t, 0), \\ \tilde{\gamma}_2(t) &= (\cosh t, 0, \sinh t). \end{aligned}$$

Lad γ_2 være en reparametrisering af $\tilde{\gamma}_2$ med konstant fart. Da er γ_1 og γ_2 if. Proposition 9.1.6 begge geodæter, da de er normalsnit (alternativt kan man bare regne og se, at $\kappa_g = 0$ for begge kurver); husk her, at et normalsnit er snittet af fladen med en plan, der står vinkelret på fladen i hvert punkt på kurven. Vi har desuden set i en afleveringsopgave, at fladen er linjeret; at den kan skrives som en forening af rette linjer, så specielt har vi en ret linje γ_3 gennem $(1,0,0)$. Denne er en geodæt pr. Proposition 9.1.4. Endelig kan vi finde en fjerde kurve γ_4 ved at spejle γ_3 i x-z-planen (hvilket bevarer fladen). ■

[P] 9.2.1. Vis at hvis **p** og **q** er forskellige punkter på enhedscylinderen, så er der enten to eller uendeligt mange geodæter på cylinderen med endepunkter **p** og **q** (som ikke ellers går igennem **p** og **q**). Hvilke par **p**, **q** har den første egenskab?

Bevis. Geodæterne er beskrevet i Eksempel 9.2.8: Afbildningen $(u,v,0) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ er en lokal isometri fra planen til enhedscylinderen, og geodæterne på cylinderen er præcis billederne af rette kurver i planen. Disse er enten cirkler med konstant z-værdi, rette lodrette linjer, eller helixer. Hvis **p** og **q** har samme z-værdi, er der præcis to geodæter med den ønskede egenskab (tegning). Hvis ikke vil der være uendeligt mange: Hvis $p_i = (\cos u_i, \sin u_i, v_i)$, $i=1,2$, vælger vi for hvert $m \in \mathbb{Z}$ den rette linje γ_m fra (u_1, v_1) til $(u_2 + 2m\pi, v_2)$. Billederne af disse kurver γ_m er da forskellige kurver fra p_1 til p_2. □

[P] 8.1.9. Lad $\mathcal{S}$ være torussen fra Eksempel 4.2.5. Beskriv delene $\mathcal{S}^+$ og $\mathcal{S}^-$ af $\mathcal{S}$, hvor Gausskrumningen K er positiv hhv. negativ. Vis, uden udregning, at

$$\int_{\mathcal{S}^+} K\,d\mathcal{A} = -\int_{\mathcal{S}^-} K\,d\mathcal{A} = 4\pi.$$

Det følger, at $\int_{\mathcal{S}} K\,d\mathcal{A} = 0$.

Bevis. De forskellige dele kan forstås rent intuitivt (se Eksempel 8.2.11 for resultatet). Vi ved, at $K = \kappa_1\kappa_2$, hvor κ_i er hovedkrumningerne; dvs. (Korollar 8.2.5) den største hhv. mindste af af de mulige normalkrumninger af kurver gennem et givet punkt. For punkter med maksimal/minimal z-værdi, vil den ene κ_i være 0, så $K = 0$ for disse punkter. På den „yderste“ halvdel af torussen vil begge κ_i være positive, så $K > 0$ for disse punkter, mens der omvendt for punkter på indersiden både vil eksistere kurver med negativ og positiv normalkrumning, så her er $K < 0$.

Mere konkret kan det ses som et resultat af en udregning (se også Eksempel 8.2.11): Torussen er omdrejningsfladen for en cirkel; hvis $0 < b < a$, så giver

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((a + b\cos\theta)\cos\varphi, (a + b\cos\theta)\sin\varphi, b\sin\theta)$$

lokale parametriseringer af fladen (med passende valg af θ, φ). Da viser en udregning, at $E = b^2$, $F = 0$, $G = (a + b\cos\theta)^2$, $L = b$, $M = 0$, $N = (a + b\cos\theta)\cos\theta$, så

$$K = \frac{\cos\theta}{b(a + b\cos\theta)},$$

som er positiv hvis $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, og negativ for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Lad nu $R_\pm$ være et område i planen, så $\sigma(R_\pm) = \mathcal{S}^\pm$. Som i beviset for Sætning 8.1.6 finder vi, at

$$\begin{aligned}\int_{R^\pm} |K|\, d\mathcal{A}_\sigma &= \int_{R^\pm} |K|(EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv = \int_{R^\pm} |K| \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\ &= \int_{R^\pm} \|N_u \times N_v\|\, du\, dv = \mathcal{A}_{N\circ\sigma}(R^\pm).\end{aligned}$$

Det er geometrisk klart, at $N \circ \sigma|_{R^\pm}$ begge er hele S^2 (pånær en nulmængde), så

$$\int_{\mathcal{S}} K\, d\mathcal{A}_\sigma = \int_{R^+} |K|\, d\mathcal{A} - \int_{R^-} |K|\, d\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^2) - \mathcal{A}(S^2) = 0.$$

□

Opgaven her viser et specielt tilfælde af Gauss–Bonnet-sætningen (se afsnit 13.4), der fortæller, at der for en kompakt flade $\mathcal{S}$ gælder $\int_{\mathcal{S}} K\, d\mathcal{A} = 4\pi(1-g)$, hvor g er en *topologisk* invariant af fladen, kaldet fladens genus (se f.eks. mine noter, som der blev reklameret med på en ugeseddel). Nutildags bruger folk store mængder kræfter på at forstå anvendelserne af en vidtrækkende generalisering fra 1963 af denne sætning, der kaldes Atiyah–Singer-indekssætningen (se Wikipedia).

[P] 8.2.1 (katenoiden). Udregn principalkrumningerne af katenoiden.

Løsning. Vi følger præcis samme strategi som i første opvarmningsopgave og finder, at normalkrumningerne er rødderne i

$$0 = \det\begin{pmatrix} -1 - \kappa\cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1 - \kappa\cosh^2 u \end{pmatrix} = \kappa^2\cosh^4 u - 1,$$

så $\kappa = \pm 1/\cosh^2 u = \pm\mathrm{sech}^2 u$. ■

[P] 8.2.2. En kurve γ på en flade $\mathcal{S}$ kaldes en krumningslinje, hvis dens tangent altid er en hovedvektor. Vis at γ er en krumningslinje, hvis og kun hvis $\dot{\mathbf{N}} = -\lambda\dot{\gamma}$ for en skalarfunktion λ, og at den tilhørende hovedkrumning i dette tilfælde er λ.

Bevis. Hvis γ er en krumningslinje, er

$$(N \circ \gamma)'(t) = (\mathcal{G} \circ \gamma)'(t) = (D\mathcal{G}_{\gamma(t)}\gamma'(t)) = -\mathcal{W}(\gamma'(t)) = -\lambda(t)\gamma'(t),$$

hvor $\lambda(t)$ er hovedkrumningen hørende til hovedretningen $\gamma'(t)$. Omvendt giver samme udregning, at hvis $(N \circ \gamma)'(t) = -\lambda(t)\gamma'(t)$, så er $\mathcal{W}(\gamma'(t)) = -\lambda(t)\gamma'(t)$. □

[P] 8.2.3. Vis at en kurve $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ i en kortomegn σ er en krumningslinje, hvis og kun hvis

$$(EM - FL)\dot{u}^2 + (EN - GL)\dot{u}\dot{v} + (FN - GM)\dot{v}^2 = 0.$$

Udled at alle parameterkurver er krumningslinjer, hvis og kun hvis enten

(i) anden fundamentalform er proportional med første fundamentalform, eller
(ii) $F = M = 0$.

For hvilke flader holder (i)? Vis at alle meridianer og paralleller på omdrejningsflader er krumningslinjer.

Bevis. Vi ved, at γ er en krumningslinje, hvis og kun hvis $\gamma' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$ er i nulrummet for $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} - \kappa I$ for en skalarfunktion κ. I basen $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ betyder dette, som i Proposition 8.2.6, at der findes et κ, så

$$0 = \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

hvilket vi kan omskrive til

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Her står, at

$$Lu' + Mv' = \kappa(Eu' + Fv'), \quad Mu' + Nv' = \kappa(Fu' + Gv').$$

Isolerer vi κ heri, får vi alt i alt, at γ er en krumningslinje, hvis og kun hvis

$$FLu'u' + MFv'u' + LGu'v' + GMv'v' = MEu'u' + MFu'v' + NEv'u' + NFv'v',$$

hvilket præcis er den ønskede ligning.

For parameterkurverne med konstant u hhv. konstant v reducerer ligningerne til $GM = NF$ og $EM = FL$. Hvis nu første fundamentalform er proportional med anden fundamentalform, så $E = xL$, $F = xM$, $G = xN$ er begge disse ligninger opfyldt, og hvis $F = M = 0$ er de også. Antag omvendt at ligningerne er opfyldt. Hvis $F = M = 0$ er vi færdige. Hvis $F \neq 0$, får vi $E(M/F) = L$, $F(M/F) = M$, $G(M/F) = N$ som ønsket; tilsvarende hvis $M \neq 0$.

Hvis de to er propertionale, har vi, at $\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ er en skalar gange identitetsmatricen. Det vil sige, at egenværdierne er ens, så alle punkter er pr. definition navlepunkter, hvilket ifølge navlepunktssætningen betyder, at hver sammenhængskomponent af fladen er en åben omegn af en plan eller en sfære.

Lad os slutteligt betragte omdrejningsfladerne. Da meridianer og paralleller pr. definition er parameterlinjer, er det nok at vise, at en af de to betingelse i sidste opgave er opfyldt. Fra Eksempel 6.1.3 har vi, at $F = 0$, og fra Eksempel 7.1.2 at $M = 0$. □

[P] 8.3.1 (i). Vis at vi ved at sætte $w = e^{-u}$ får en reparametrisering $\sigma_1(v, w)$, $v \in \mathbb{R}, w > 0$, af pseudosfæren med første fundamentalform $\frac{dv^2 + dw^2}{w^2}$ (kaldet den øvre halvplan-model).

Bevis. Husk først at pseudosfæren er omdrejningsfladen $\sigma(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ med $f(u) = e^u$ og $g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}}\, du$.

Først bør vi overveje, at reparametriseringsafbildningen $(v, w) \mapsto (u, v) = (-\log w, v)$ har invertibel Jacobimatrix J. Vi finder, at

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/w \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

som har determinant $1/w \neq 0$. If. Opgave 6.1.4 og Eksempel 6.1.3 er første fundamentalform for reparametriseringen nu givet ved

$$J^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} w^{-2} & 0 \\ 0 & w^{-2} \end{pmatrix}$$

som ønsket. □

[P] 9.1.3. Betragt tuben af radius $a > 0$ omkring en kurve γ i $\mathbb{R}^3$, parametriseret ved buelængde, defineret i Øvelse 4.2.7 ved

$$\sigma(s, \theta) = \gamma(s) + a(\cos\theta\,\mathbf{n}(s) + \sin\theta\,\mathbf{b}(s)).$$

Vis at parameterkurverne på tuben givet ved faste værdier af s er cirkulære geodæter på σ.

Bevis. At kurverne er cirkulære er klart, da både $\mathbf{n}$ og $\mathbf{b}$ er enhedsvektorer. Cirklen har centrum $\gamma(s)$ og radius a.

Vi påstår, at kurven er et normalsnit: Lad Π være planen gennem $\gamma(s)$ med normalvektor $\mathbf{t}(s)$. Denne (translateret til origo) er udspændt af $\mathbf{n}$ og $\mathbf{b}$ og snitter derfor parameterkurven, som vi er interesseret i. Vi skal derfor bare vise, at planen er vinkelret på fladen i ethvert punkt.

Vi finder, at

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \mathbf{t}(s) + a(\cos\theta(-\kappa\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s)) + \sin\theta(-\tau\mathbf{n})),\\ \sigma_\theta &= a(-\sin\theta\mathbf{n}(s) + \cos\theta\mathbf{b}(s)).\end{aligned}$$

Idet vi husker, at $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t}$ og $\mathbf{t} = \mathbf{n}\times\mathbf{b}$, får vi

$$\sigma_s \times \sigma_\theta = -a\sin\theta\mathbf{b} - a\cos\theta\mathbf{n} + a^2(\cos\theta\kappa\sin\theta\mathbf{b} - \cos\theta\kappa\cos\theta\mathbf{n} + \cos\theta\tau\sin\theta\mathbf{t} - \sin\theta\tau\cos\theta\mathbf{t}),$$

som tilhører rummet udspændt af $\mathbf{b}$ og $\mathbf{n}$ og derfor er vinkelret på $\mathbf{t}$ og dermed Π. □

[P] 9.2.2. Brug korollar 9.2.7 til at finde alle geodæter på en cirkulær kegle.

Bevis. Husk at dette korollar siger, at en lokal isometri mellem to flader tager geodæter til geodæter. I tilfældet med den cirkulære kegle $\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ har vi tidligere set, at denne er isometrisk med en del af planen via afbildningen

$$(u\cos v, u\sin v, u) \mapsto (\sqrt{2}u\cos\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}u\sin\tfrac{v}{\sqrt{2}}, 0).$$

Geodæter er altså billeder af rette linjer $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ under den inverse til denne isometri. (Bemærk: Egentlig har vi hermed kun klaret keglen fraregnet en linje, men denne kan som altid tages med ved at konstruere en tilsvarende isometri i en lokal parametrisering, der indeholder linjen). □