Ølopgaver i geometri

22. april 2013

Hvis I er interesserede i løsninger af nedenstående opgaver, men ikke selv kan finde på nogen, skal I selvfølgelig bare sige til. Øllet kan som udgangspunkt vindes en uges tid, efter at opgaven er stillet, men I skal selvfølgelig være velkomne til at give besvarelser efterfølgende – disse præmieres så med et navn i en pdf-fil på nettet.

Ølopgave 1. Definer eksponentialet af en matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ved

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

og betragt mængderne

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &= M_n(\mathbb{R}), \\
\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertibel}\}, \\
\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}, \\
\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}, \\
\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}, \\
\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\}, \\
\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I,\ \det(A) = 1\}.
\end{aligned}$$

Her står „gl“ for „generel lineær“, „sl“ for „speciel lineær“[1], „o“ for „ortogonal“ og „so“ for „speciel ortogonoal“.

(1) Vis at der for alle $M_n(\mathbb{R})$ gælder, at $\exp(\mathrm{tr}(A)) = \det(\exp(A))$. (Start eventuelt med diagonaliserbare A).

(2) Hvilke af ovenstående 7 mængder er vektorrum (med matrixaddition og reel skalarmultiplikation), og hvilke er grupper (med matrixmultiplikation som gruppemultiplikation)?

(3) Specialeksempel på opgaven nedenfor: Lad $A(t) \in M_2(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, være diagonalmatricerne $A = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ og sæt $B = A'(0)$. Hvilke af grupperne tilhører $A(t)$, og hvilke af vektorrummene tilhører B?

Lad $R(\theta) \in M_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \mathbb{R}$, betegne matricerne for rotation med vinkel θ i $\mathbb{R}^2$, og lad $S = R'(0)$. Hvilke af grupperne tilhører $R(\theta)$, og hvilke af vektorrummene tilhører S?

(4) Lad G være en af grupperne ovenfor. Vi siger, at *Liealgebraen hørende til* G er mængden af alle matricer A, så $\exp(tA)$ tilhører G for alle $t \in \mathbb{R}$. Find Liealgebraen hørende til hver af de fire grupper.

Bonus Det komplekse tilfælde: Hvad er Liealgebraerne hørende til grupperne $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ og $\mathrm{SU}(n)$ bestående af hhv. invertible komplekse matricer, komplekse matricer med determinant 1, unitære matricer, og unitære matricer med determinant 1?

Bonus til afleveringsopgave 5. Find et fuldstændigt metrisk rum X og et $m > 0$, samt en afbildning $S : X \to X$, der ikke er en kontraktion, men som opfylder, at S^m *er* en kontraktion.

Ølopgave 2. Opgaven her handler om at differentiere afbildninger af matricer.

(1) Vis at afbildningerne $p_k : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, givet ved $p_k(A) = A^k$ er differentiable, ved at bruge definitionen på differentiabilitet (hvor $\|\cdot\|$ nu betegner operatornormen på $M_n(\mathbb{R})$) og find differentialet $D(p_k)_{A_0} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ for $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$.

(2) Find det andenordensdifferentialet $D^2(p_k)_{A_0} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ for $k = 2$ (og andre k alt efter mod).

(3) Vis at $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ er åben, at afbildningen $\varpi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ givet ved $\varpi(A) = A^{-1}$ er differentiabel med differential $D\varpi_{A_0} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ givet ved

$$D\varpi_{A_0}(B) = -A_0^{-1} B A_0^{-1}$$

for $A_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Bonus Vis at $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ defineret ovenfor er differentiabel og find $D\exp_{A_0}$.

Bonus til afleveringsopgave 7. Vis at etpunktskompaktifikationen af $\mathbb{R}^n$ er homøomorf med $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ (med sportopologien fra $\mathbb{R}^{n+1}$).

[1] En huskeregel her er, at „sl“ også kunne stå for „sporløs“

Ølopgave 3. Den følgende opgave udvider resultatet fra Opgave 5.9.23, som blev diskuteret til TØ i uge 8.

(1) Er S^2 og S^3 homøomorfe?
(2) Er S^n og S^m homøomorfe, når $n \neq m$?
(3) Er $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ homøomorfe, når $n \neq m$?

Ølopgave 4. Lad $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ med sportopologien fra $\mathbb{R}^3$. Vi så, at C er homøomorf med $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, og spørger i tråd med opgaven ovenfor om følgende:

(1) Er S^2 og C homøomorfe?
(2) Er $\mathbb{R}^2$ og C homøomorfe?

Ølopgave 5. Vis at mængden

$$V = \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

er sammenhængende men ikke kurvesammenhængende.