# Ølopgaver i lineær algebra

30. maj, 2010

En stor del af de fænomener, vi observerer, er af lineær natur. De naturlige matematiske objekter i beskrivelsen heraf bliver vektorrum − rum hvor man kan lægge elementer sammen og gange dem med skalarer − samt afbildninger mellem disse, der opfører sig pænt med hensyn til disse vektorrumsegenskaber; afbildningerne skal med andre ord være lineære. Studiet af lineære afbildninger (på endeligdimensionale) vektorrum reducerer efter et basisvalg til studiet af de tilhørende matrixrepræsentationer. Et gennemgående tema i de følgende opgaver er sammenhængen mellem de lineære afbildninger og deres matrixrepræsentationer. Hvis I er interesserede i løsninger af opgaverne, men ikke selv kan finde på nogen, skal I selvfølgelig bare sige til. Øllet kan vindes en uge efter opgaven er stillet, men I skal selvfølgelig være velkomne til at give besvarelser efterfølgende − disse præmieres så med et navn i en pdf-fil på nettet.

**Ølopgave 1.** Bemærk: Opgaven her er i et vist omfang overflødiggjort af noterne (om end formuleret lidt anderledes deri). Sidste del står dog ingen steder (endnu) og er ganske vigtig.

(a) Betragt $\mathbb{R}^n$ med det sædvanlige indre produkt. Vis at en $n \times n$-matrix $A$ er symmetrisk, hvis og kun hvis der for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gælder $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

(b) Betragt $\mathbb{C}^n$ med det sædvanlige indre produkt. Vis at en $n \times n$-matrix $A$ er hermitisk/hermitesk/selvadjungeret, hvis og kun hvis der for alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gælder $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

(c) Lad $A$ være en selvadjungeret $n \times n$-matrix, og lad $S = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i\}$ betegne matricens *spektrum*: Samlingen af egenværdier for $A$. Vis at spektret er reelt; med andre ord, vis at $S \subseteq \mathbb{R}$.

Resultatet af denne opgave er følgende: Betragt et generelt (endeligdimensionalt) vektorrum $V$ med et indre produkt og en lineær afbildning $L : V \to V$. Hvorimens begrebet selvadjungeret giver god mening for matricer, er det ikke klart, hvad det vil sige for en generel lineær afbildning at være selvadjungeret. Opgaven ovenfor leder os til følgende definition: $L$ kaldes *selvadjungeret*, hvis der for alle $v, w \in V$ gælder $\langle L(v), w\rangle = \langle v, L(w)\rangle$ (sml. noternes def. 11.1.21).

**Ølopgave 2** (Mads (MA2))**.** Lad $L : V \to V$ være en lineær afbildning på et endeligdimensionalt vektorrum $V$ og lad $A$ være en matrixrepræsentation for $L$. Definer nu $\det(L) := \det(A)$ og $\operatorname{tr}(L) := \operatorname{tr}(A)$. Vis at $\det(L)$ og $\operatorname{tr}(L)$ er veldefinerede; det vil sige, at de ikke afhænger af den valgte matrixrepræsentation.

**Ølopgave 3** (Kenneth (MA2), Mads (MA2))**.** Lad $S$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og betragt projektionen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ af en vektor ned på $S$.

(a) Gør rede for, at der findes en ortonormalbasis $(u_1, \dots, u_k)$ for $S$ og bevis, at denne kan udvides til en ortonormalbasis $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ for $\mathbb{R}^n$.

(b) Bevis at matrixrepræsentationen for projektionen i denne basis er givet ved

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dette eksempel giver en intuition om, hvordan generelle projektioner virker: Givet en tilstrækkeligt smart basis, vil projektionen blot glemme de sidste $n-k$ indgange i den vektor, den virker på. Sammen med ølopgave 2 kan vi let udregne forskellige egenskaber ved projektionsafbildninger: Deres spor er f.eks. $\operatorname{tr}(P)=k$, og der gælder $\det(P)=0$, hvis $k<n$. Det er ligeledes ikke længere overraskende, at projektioner af idempotente, eller at de er ikke-invertible for $k<n$.

**Ølopgave 4** (Tobias (MA1), Mads (MA2))**.** Ofte i matematikken er man interesserede i såkaldte invarianter. En *invariant* er en egenskab, der knyttes til en samling matematiske objekter, og som forbliver uændret, når objekterne udsættes for en transformation af en bestemt type. Vi har i ølopgave 2 set, at determinanten og sporet er eksempler på egenskaber ved matricer, der ikke ændres ved koordinatskift: Hvis to matricer har forskellig determinant eller spor, er de altså ikke relateret ved et koordinatskift. Determinanten og sporet kan ses som (særligt interessante) specialtilfælde af de såkaldte elementære symmetriske polynomier evalueret i egenværdierne. De *elementære symmetriske polynomier* i $n$ variable $x_1,\dots,x_n$ er defineret således:

$$\begin{aligned} e_0(x_1,\dots,x_n) &= 1 \\ e_1(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{1\le j\le n} x_j \\ e_2(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{1\le j<k\le n} x_j x_k \\ &\;\;\vdots \\ e_n(x_1,\dots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

eller generelt

$$e_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_n}$$

for $k=1,\dots,n$.

(a) Lad $A$ være en $2\times 2$-matrix, reel eller kompleks, med (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$. Vis at det karakteristiske polynomium for $A$ er givet ved

$$p_A(x) = x^2 - e_1(\lambda_1,\lambda_2)x + e_2(\lambda_1,\lambda_2) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A).$$

(b) Lad $A$ være en $n\times n$-matrix, reel eller kompleks, med (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$. Vis at det karakteristiske polynomium for $A$ er givet ved

$$p_A(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(-x)^{n-i}.$$

Bevis at

$$\det(A+I) = \sum_{i=0}^{n} e_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

(c) Vis at $e_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ er invariant under koordinatskift. Lad $L : V \to V$ være en lineær operator på et reelt $n$-dimensionalt reelt eller komplekst vektorrum med en matrixrepræsentation $A$ i en given basis, og lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være de tilhørende egenværdier. Konkluder af det foregående, at $c_k(L) := e_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ikke afhænger af valget af basis. Forklar hvordan dette generaliserer ølopgave 2.

**Ølopgave 5** (Mads (MA2), Tobias (MA1))**.** Spektralsætningen kan formuleres på flere forskellige måder. Vi ser her på den reelle udgave af den. Betragt $\mathbb{R}^n$ med det sædvanlige indre produkt og lad $A$ være en $n \times n$-matrix. Lad $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ være alle egenværdierne for $A$, med $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. Lad $P_{\lambda_i}$ være projektionen på egenrummet $E_{\lambda_i}(A)$. Vis at de følgende er ækvivalente.

(a) $A$ er symmetrisk.

(b) Der findes en ortogonalmatrix $U$ så $U^T AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, hvor $\lambda_i$ optræder $\mathrm{Alg}(\lambda_i)$ gange, og hvor søjlerne i $U$ er egenvektorer for $A$.

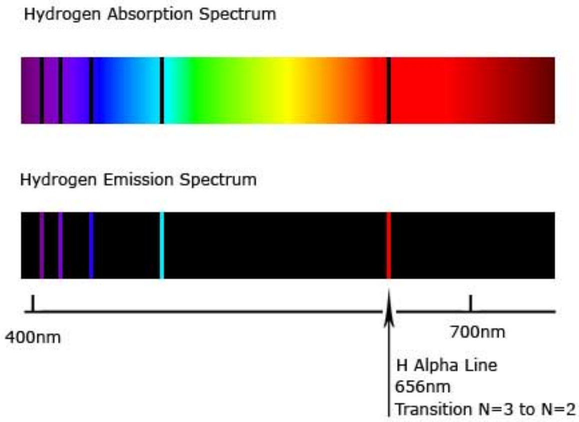
(c) Der findes en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $A$.

(d) Egenrummene er ortogonale, og der gælder

$$A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_m P_{\lambda_m}.$$

Opskrivningen i (d) i ovenstående kaldes spektraldekompositionen af $A$. Sætningen gælder også i det uendeligdimensionale tilfælde, hvor summen erstattes af et integral med hvad der hører til af teknikaliteter; dette tilfælde undersøges nærmere i forskellige kurser i funktionalanalyse på matematik. Spektralopløsningsformuleringen af spektralsætningen dukker ofte op i matematisk fysik; her følger en (meget) grov forklaring af hvorfor: I klassisk fysik er vi vant til at tænke på partikler, som noget der lever i $\mathbb{R}^3$ og observable (postion, impuls, energi, ...) er noget, der tager en partikel (og dens hastighed) og giver et tal. I kvantemekanik er sagen lidt mere kompliceret (om end ganske nydelig). Her erstattes partikler med tilstande, der er vektorer i et indre produkt-rum $\mathcal{H}$, hvor det underliggende metriske rum[1] er fuldstændigt (i analyse-forstand); et såkaldt Hilbertrum. Observable repræsenteres i dette billede af selvadjungerede afbildninger; det vil sige, at spektralsætningen gælder for dem, og deres spektrum (se ølopgave 1) er reelt. De mulige udfald af en observation er så præcis egenværdierne, og observation svarer til projektion ned på et egenrum, jf. spektralopløsningen. Navnet spektrum er ikke tilfældigt: På fig. 1 (som jeg har stjålet fra nettet) ses f.eks. spektret for brintatomet – de sorte streger svarer til mulige forskelle i energiniveauer, og disse niveauer svarer igen til egenværdierne for en bestemt selvadjungeret afbildning kaldet Hamiltonoperatoren.

[1]Husk at et indre produkt giver en metrik ved $d(v, w) = \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$.




Figur 1: Brints spektrum

**Ølopgave 6** (Åben)**.** I denne opgave ser vi nærmere på den såkaldte funktionalkalkyle: Hvis vi betragter en vilkårlig matrix $A$ og en vilkårlig funktion $f$, er det ikke klart, hvad vi vil forstå med $f(A)$. Ved hjælp af diagonalisering kan vi dog slippe af sted med det: Antag at $A$ er en diagonaliserbar $n \times n$-matrix, så $A = X\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)X^{-1}$ for et passende $X$ og lad $f$ være en kompleks funktion defineret på spektret af $A$ (se opg. 1). Sæt nu

$$f(A) = X\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))X^{-1}.$$

(a) Lad os først indse, at dette begreb giver den rigtige mening for polynomier. Lad $A$ være en diagonaliserbar $n \times n$-matrix og lad $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være polynomiet $f(z) = a_m z^m + \cdots a_1 z + a_0$. Vis at

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

(b) Herfra sætter kun fantasien grænser; lad os for eksempel kaste et fornyet blik på ugeseddelopgaven på ugeseddel 12. Lad $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ og $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ betegne realdel og imaginærdel af et komplekst tal. Lad $A$, $H$, $S$ og $U$ være som i opgaven. Vis at $\operatorname{Re}(A) = H$ og $i\operatorname{Im}(A) = S$, så $A = \operatorname{Re}(A) + i\operatorname{Im}(A)$.

(c) Lad os i samme tråd betragte den såkaldte *polardekomposition* af en invertibel matrix, der svarer til polærdekompositionen af et komplekst tal $z = |z|e^{i\theta}$: Vis nemlig at enhver reel invertibel matrix $A$ kan skrives $A = QP$, hvor $Q$ er ortogonal og $P$ er symmetrisk og positiv definit. (Vink: Vis at matricen $\sqrt{A^T A}$ giver mening i forhold til ovenstående, og at den er symmetrisk og positiv definit.)

Til den næste opgave får vi brug for et par definitioner

**Definition.** En *kvadratisk form* $Q : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ (i $n$ variable) over et legeme $\mathbb{F}$ er et homogent symmetrisk polynomium af grad 2 med $n$ variable; dvs.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

hvor $a_{ij}$ er elementer i $\mathbb{F}$ og $a_{ij} = a_{ji}$. Som i det reelle tilfælde kan vi til enhver kvadratisk form knytte en symmetrisk matrix $A = (a_{ij})_{ij}$, og som vi har set, er kravet om symmetri ikke essentielt, da $x_i x_j = x_j x_i$ og vi generelt kunne betragte matricen $(\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}))_{ij}$.

**Definition.** En *bilineær form* på et $\mathbb{F}$-vektorrum $V$ er en afbildning $B : V \times V \to \mathbb{F}$, der er lineær i hver variabel. $B$ kaldes *symmetrisk*, hvis $B(v, w) = B(w, v)$ for alle $v, w \in V$. $B$ kaldes *ikkedegenereret*, hvis følgende betingelse er opfyldt: Hvis der for et $v \in V$ gælder, at $B(v, w) = 0$ for alle $w \in V$, så er $v = 0$. Hvis $V$ er endeligdimensionalt, og $\{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for $V$, kan vi knytte en matrix $A$ til en bilineær form ved at definere $A_{ij} = B(v_i, v_j)$.

**Ølopgave 7** (Åben)**.** Lad os i denne opgave betragte sammenhængen mellem kvadratiske former og symmetriske bilineære former.

(a) Lad $B$ være en symmetrisk bilineær form på $\mathbb{F}^n$, hvor $\mathbb{F}$ er et vilkårligt legeme. Vis at $Q(x) = B(x, x)$ definerer en kvadratisk form i $n$ variable over $\mathbb{F}$.

(b) Lad $Q$ være en kvadratisk form i $n$ variable over $\mathbb{F}$ og antag, at der i $\mathbb{F}$ gælder $1 + 1 \neq 0$. Vis at udtrykket

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

definerer en symmetrisk bilineær form på $\mathbb{F}^n$. Forklar hvorfor det er vigtigt, at $1 + 1 \neq 0$. [2]

(c) I (a) har vi defineret en afbildning

$$\{\text{symmetriske bilineære former}\} \to \{\text{kvadratiske former}\},$$

og i (b) har vi, når $1 + 1 \neq 0$, defineret en afbildning

$$\{\text{kvadratiske former}\} \to \{\text{symmetriske bilineære former}\}.$$

Vis at de to afbildninger er hinandens inverse, og dermed at de begge er bijektioner.[3] Teorien for kvadratiske former og symmetriske bilineære former er derfor den samme, og ofte skelner man ikke mellem de to.

(d) Lad os nu rette vores opmærksomhed mod det reelle tilfælde. Her har vi i hovedaksesætningen set, at vi ved at rotere vort koordinatsystem kan bringe en vilkårlig kvadratisk form på en særligt pæn form. Mere præcist gælder, at vi givet en kvadratisk form $Q$ over $\mathbb{R}$ kan finde en rotationsmatrix $R$, så

$$Q(Rx) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er egenværdierne for $A$. Overvej at $Q \circ R$ er en kvadratisk form med tilhørende matrix $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Hvis vi tillader andre koordinatskift end rotationer, kan vi forsimple udtrykket yderligere: Lad

[2] Det mindste naturlige tal $m$ så summen af $m$ 1-taller i $\mathbb{F}$ giver 0 kaldes karakteristikken af legemet og betegnes $\mathrm{char}(\mathbb{F})$. Hvis intet sådant $n$ findes (tænk på $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$) sætter vi $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Tilfældet $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$ giver som i opgaven her anledning til en række besynderligheder.

[3] Den sidste afbildning kaldes undertiden polarisering.

$Q$ være en kvadratisk form over $\mathbb{R}$. Vis at der findes en invertibel matrix $X$, så

$$Q(Xx) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2 + 0x_{r+s+1}^2 + \cdots + 0x_n^2,$$

for passende $r$ og $s$ og hermed, at $Q \circ X$ er en kvadratisk form med tilhørende matrix $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots 0)$.

(e) Vis at tallene $r$ og $s$, der blev fundet i det ovenstående er invarianter af $Q$. Med andre ord, vis at hvis

$$Q(Yx) = x_1^2 + \cdots + x_{r'}^2 - x_{r'+1}^2 - \cdots - x_{r'+s'}^2 + 0x_{r'+s'+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

for en invertibel matrix $Y$, så er $r = r'$ og $s = s'$.

Resultatet i opgave (e) er kendt som Sylvesters træghedslov og blev bevist i 1852. Parret $(r, s)$ indgår i flere sammenhænge og kaldes *signaturen* af den kvadratiske form/symmetriske bilineære form.[4] Et velkendt eksempel på en symmetrisk bilineær form er det indre produkt på $\mathbb{R}^3$, der har signatur $(3, 0)$, da matricen for denne bilineære form i standardbasen blot er $I = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$. Det indre produkt spiller en nøglerolle i forståelsen af geometrien af $\mathbb{R}^3$: Ud fra det indre produkt kan vi få begreber som vinkel, afstand og længde. En af hovedpointerne i den fysiske teori kaldet relativitetsteorien er, at dette i virkeligheden er utilstrækkeligt, og at vi i stedet tvinges til at betragte en symmetrisk bilineær ikkedegenereret form med signatur $(3, 1)$. Mængden $\mathbb{R}^4$ udstyret med det letteste eksempel på en sådan form, nemlig $Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = -x_0x_0 + x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3$, kaldes *Minkowskis rumtid*[5] og betegnes ofte $\mathbb{R}^{3,1}$. Formen $Q$ er på flere punkter forskellig fra det sædvanlige indre produkt: F.eks. er den ikke positiv definit, og udtrykket $\|x\|^2 = Q(x)$ definerer ikke en norm, som det sædvanligvis ville gøre.

[4] Nogle steder defineres signaturen til at være heltallet $r - s$.

[5] Se også `http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space#Structure`