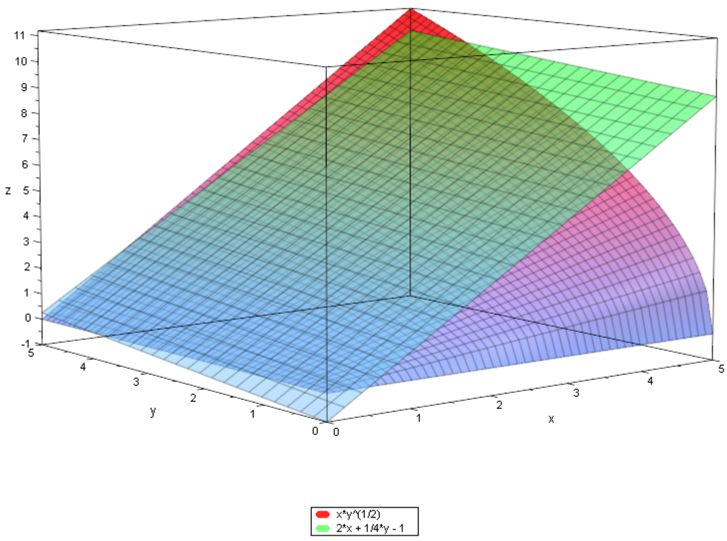
Noter til Calculus-TØ uge 38

19. september 2008

[S] 11.4.9 – linearisering

I denne opgave skulle vi finde lineariseringen af funktionen $f(x,y) = x\sqrt{y}$ i punktet $(1,4)$. Lineariserinen er, som sagt til TØ, en lineær approksimation til funktionen f, som er lig f i punktet $(1,4)$, og som ofte er meget nemmere at regne på end funktionen selv, om end de kun stemmer overens i en omegn af det givne punkt. Dette er hvad der fremgår af nedenstående figur, hvor grafen for f er vist sammen med grafen for lineariseringen. Som vi kan se, stemmer de overens i punktet $(1,4)$ (i venstre side af billedet), og lineariseringen fungerer som approksimation af funktionen i en omegn af punktet.



[S] 11.4.23

Vi er givet funktionen $z(x,y) = 5x^2 + y^2$ og ønsker at finde Δz hhv. dz når (x,y) ændrer sig fra $(1,2)$ til $(\frac{21}{20}, \frac{21}{10})$. Opgaven tjener til illustration af hvordan differentialet dz kan benyttes til undersøgelse af funktionsændringer, når argumentet (x,y) varieres en smule. Ønsker man en mere grafisk intuition om disse størrelser, er det værd at tage et kig på figur 7 på s. 775.
Ved indsættelse i udtrykket for z finder vi

$$\Delta z = z(\tfrac{21}{20}, \tfrac{21}{10}) - z(2,1) = \tfrac{369}{400} = 0{,}9225.$$

Pr. definition er differentialet lig

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dz + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

hvor dx og dy blot er frie variable, der i denne opgaves kontekst betragtes som ændringerne i x og y (se diskussionen efter definition 10 s. 774). Partiel differentiation af z giver

$$dz = 10x\,dx + 2y\,dy,$$

og med $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = \frac{1}{20}$, og $dy = \Delta y = \frac{1}{10}$ fås

$$dz = \tfrac{9}{10} = \tfrac{360}{400},$$

som bemærkes at være i nærheden af, om end en smule under værdien af Δz.

[S] 11.4.31

I denne opgave betragter vi modstanden i 3 parallelkoblede elektriske modstande. Den matematiske model udsiger, at den samlede modstand er

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \tag{1}$$

hvor R_i er modstanden i modstand i. Vi er givet tre værdier for modstandene og en fejlmargin på $0,5\%$. Vi vil herudfra finde den største mulige totale fejl på den totale modstand R. Som i eksempel 6, side 776, gør vi det ved hjælp af differentialer. Skriver vi lidt om på (1) får vi

$$R = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}$$

og differentiation af R med hensyn til hver af de tre variable, R_i, får vi (ved brug af kædereglen)

$$\begin{aligned} dR =& \frac{\partial R}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} dR_2 + \frac{\partial R}{\partial R_3} dR_3 \\ =& (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_1^{-2} dR_1 + (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_2^{-2} dR_2 \\ &+ (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} R_3^{-2} dR_3 \\ =& (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-2} (R_1^{-2} dR_1 + R_2^{-2} dR_2 + R_3^{-2} dR_3). \end{aligned}$$

Ved indsættelse af værdierne $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 50\,\Omega$, $dR_1 = 0,005R_1$, $dR_2 = 0,005R_2$, og $dR_3 = 0,005R_3$ fås den maksimale fejl $\Delta R \approx dR \approx 0,059\,\Omega$.